EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL DARBOUX

SKRIPSI

Oleh:

DZAWIN NUHA ALHIDAYAH
NIM. 05510017

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2010

EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL DARBOUX

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

DZAWIN NUHA ALHIDAYAH
NIM. 05510017

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2010

SURAT PERNYATAAN
ORISINALITAS PENELITIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Dzawin Nuha Alhidayah
NIM	: 05510017
Fakultas/Jurusan	: Matematika
Judul Penelitian	: Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Darboux

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 18 Januari 2010
Yang Membuat Pernyataan,

Dzawin Nuha Alhidayah
NIM. 05510017

EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL DARBOUX

SKRIPSI

Oleh:

DZAWIN NUHA ALHIDAYAH
NIM. 05510017

Telah Disetujui untuk Diuji :

Dosen Pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
Hairur Rahman, S.Pd,M.Si.	**Dr.Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 19800429 200604 1 003	**NIP. 19731212 199803 1 001**

Tanggal, 8 Desember 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd.
NIP. 19751006 200312 1 001

EKUIVALENSI
INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL DARBOUX

SKRIPSI

Oleh:

DZAWIN NUHA ALHIDAYAH
NIM. 05510017

Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 23 Januari 2010

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1.	Penguji Utama	: Usman Pagalay, M.Si NIP 19650414 200312 1 001	(……………………)
2.	Ketua Sekretaris	: Abdul Aziz, M.Si NIP 19760318 200604 1 002	(……………………)
3.	Anggota	:Hairur Rahman, S.Pd,M.S.i NIP 19800429 200604 1 003	(……………………)
4.	Anggota	: Dr. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	(……………………)

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd.
NIP. 19751006 200312 1 001

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٥

" Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan....."

LEMBAR PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa bangga dan penuh rasa syukur kupersembahkan karya kecilku ini kepada kedua orang tuaku yang tiada letih memberiku limpahan kasih sayang, do'a, nasehat serta bimbingan juga untuk seluruh keluargaku dan semua pihak yang membantu terselesaikannya skripsi ini

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi Robbil ‘Alamin, segala puji bagi Allah SWT, Maha Pengasih dan Maha Penyayang. Dengan seizin-Mu, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini yang berjudul**”Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Darboux”.**

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang yang kaya akan ilmu pengetahuan.

Dalam penulisan skripsi ini, banyak pihak yang telah berjasa dan senantiasa memberikan dukungan, bimbingan, arahan serta motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu peneliti memberikan ucapan terimkasih yang dalam kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Malang yang telah memberikan wadah belajar bagi keilmuan kami.
2. Prof. Drs. H. Sutiman, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri(UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua jurusan Matematika Universitas Islam Negeri(UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Hairur Rahman, S.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang selalu setia memberi bimbingan dan masukan. Serta Dr. Ahmad Barizi, M.A selaku dosen pembimbing agama yang juga tak lelah memberi masukan serta nasehat.
5. Seluruh Bapak dan Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Kedua orang tua penulis yang tidak pernah berhenti mencurahkan do’a dalam setiap langkah penulis dengan penuh ketulusan hati dan kesabaran jiwa demi keberhasilan penulis.
7. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2005 Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan dukungan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabat penulis, Ikatan Mahasiswa Muhammadiyah (IMM) Komisariat Revivalis, Pelopor, Reformer UIN Malang. Khususnya komisariat IMMAWATI yang telah memberikan semangat kepada penulis serta teman-teman di UKM Pramuka yang telah memberi dukungan.
9. Serta semua pihak yang tidak dapat peneliti sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dalam penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT, melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa di dunia ini tidak ada yang sempurna. Begitu juga dalam penulisan skripsi ini, yang tidak luput dari kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, dengan segala ketulusan dan kerendahan hati penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun.

Akhirnya dengan segala bentuk kekurangan dan kesalahan, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan pihak-pihak yang bersangkuatn.

Malang,   Januari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

No	Simbol	Keterangan
1	$\subset$	Subset dari
2	U	Upper
3	L	Lower
4	$\in$	elemen
5	$\leq$	Kurang dari sama dengan
6	$\geq$	Lebih besar dari sama dengan
7	$\forall$	Untuk setiap
8	Sup	supremum
9	Inf	infimum
10	$>$	Lebih besar dari
11	$<$	Kurang dari
12	$\cap$	Irisan
13	$\cup$	Gabungan
14	R	Himpunan bilangan riil
15	N	Himpunan bilangan asli
16	x_n	Barisan (sampai ke-n)
17	δ	Delta(besar)
18	ε	Epsilon
19	lim	Limit
20	$\sum$	Sigma
21	$\int$	Integral

22	$D\int_a^b f$	Integral Darboux
23	$R\int_a^b f$	Integral Riemann
24	[...]	Interval tertutup
25	$\lVert ... \rVert$	Norm(panjang)

ABSTRAK

Alhidayah, Dzawin Nuha.2009. **Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Darboux**. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. UIN Maulana Malik Ibrahim.

Pembimbing: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si.

Dr. Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci: Terintegral Riemann, Terintegral Darboux, Integral Riemann, Integral Darboux, Ekuivalensi

Pada tahun 1875 G. Darboux memodifikasi definisi Integral Riemann dengan terlebih dahulu mendefinisikan jumlah Darboux atas dan Darboux bawah, selajutnya mendefinisikan Integral Darboux atas dan Integral Darboux bawah.

Keduanya memiliki ekuivalensi yaitu $R\int_a^b f = D\int_a^b f$. Suatu fungsi dikatakan terintegral Darboux jika dan hanya jika ia juga merupakan terintegral Riemann, dan jika nilai-nilai Integral dari keduanya ada, maka bersifat sama. Integral Darboux mempunyai keuntungan lebih sederhana dibanding Integral Rieman

Karena ekuivalensi maka sifat Integral Riemann yakni ketunggalan nilai, kelinieran, keterbatasan juga berlaku pada Integral Darboux.

Adapun sifatnya adalah:

a. $\left|S(Q;f) - A\right| < \varepsilon$

b. $D\int_a^b (f+g)(x) = D\int_a^b f(x) + D\int_a^b g(x)$

c. $D\int_a^b \alpha f(x) = \alpha(D)\int_a^b f(x)$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam Matematika banyak sekali dikenal cabang ilmu. Salah satu cabangnya adalah Analisis Real. Analisis sendiri merupakan proses mengurai sesuatu hal menjadi berbagai unsur yang terpisah untuk memahami sifat, hubungan, dan peranan masing-masing unsur. Analisis secara umum sering juga disebut dengan pembagian. Dalam logika, analisis atau pembagian berarti pemecah-belahan atau penguraian secara jelas berbeda ke bagian-bagian dari suatu keseluruhan.

Selain Analisis dalam Matematika kita juga mengenal ilmu Kalkulus yang merupakan ilmu dasar Matematika. Kalkulus (dari Bahasa Latin calculus yang artinya "batu kecil") adalah cabang ilmu matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan deret takterhingga. Kalkulus mempunyai aplikasi yang luas dalam bidang sains dan teknik. Kalkulus memiliki dua cabang utama, kalkulus diferensial dan kalkulus integral yang saling berhubungan melalui teorema dasar kalkulus. Pada periode zaman kuno beberapa pemikiran tentang integral kalkulus telah muncul, namun tidak dikembangkan dengan baik dan sistematis(Cennapedia;2000:1).

Perhitungan volume dan luas yang merupakan fungsi utama dari kalkulus integral bisa ditelusuri kembali pada Papirus Moskow Mesir (1800 SM) di mana orang Mesir menghitung volume dari frustrum piramid.

Archimedes mengembangkan pemikiran ini lebih jauh dan menciptakan heuristik yang menyerupai kalkulus integral. Sekitar tahun 1000, matematikawan Irak Ibn al-Haytham (Alhazen) menjadi orang pertama yang menurunkan rumus perhitungan hasil jumlah pangkat empat, dan dengan menggunakan induksi matematika, dia mengembangkan suatu metode untuk menurunkan rumus umum dari hasil pangkat integral yang sangat penting terhadap perkembangan kalkulus integral.

Teorema fundamental kalkulus menyatakan bahwa turunan dan integral adalah dua operasi yang saling berlawanan. Lebih tepatnya, teorema ini menghubungkan nilai dari anti derivatif dengan integral tertentu. Karena lebih mudah menghitung sebuah anti derivatif daripada mengaplikasikan definisi dari integral, teorema fundamental kalkulus memberikan cara yang praktis dalam menghitung integral tertentu. Teorema fundamental kalkulus menyatakan: Jika sebuah fungsi f adalah kontiniu pada interval $[a,b]$ dan jika F adalah fungsi yang mana turunannya adalah f pada interval (a,b), maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dalam perkembangannya Kalkulus mengalami perkembangan yang sangat pesat. Demikian juga dengan Integral mengalami perkembangan yang cukup signifikan dengan sumbangan pemikiran dari tokoh-tokoh matematika. Sir Isac Newton adalah orang yang mempunyai kontribusi besar dalam Kalkulus. Begitu juga Leibniz. Hanya saja Newton memulai dari Turunan sedangkan Leibniz sebaliknya. Ia lah yang pertama kali mencetuskan notasi

Integral yang dipakai hingga sekarang(www. Mate-mati-kaku. Com. Kalkulus dan sejarahnya. Di akses tanggal 22 Desember 2008).

Teorema Integral sudah dimulai pada abad ke-17, tetapi hingga akhir abad tersebut belum ada validitas istilah-istilah Integrasi hingga Cauchy membuktikannya sebagai pijakan. Cauchy memberikan definisi modern tentang kekontinuan dan mendefinisikan Integral sebagai penjumlahan limit. Dia memulai pekerjaannya pada tahun 1814, dua tahun kemudian dia mendefinisikan limit sebagai penjumlahan Cauchy.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i(x_i - x_{i-1}))$$

Kalkulus dikembangkan lebih lanjut oleh Jacob dan Johann Bernoulli disusul oleh L'Hopital sehingga makin lengkap. (www. Mate-mati-kaku. Com. Kalkulus dan sejarahnya. Di akses tanggal 22 Desember 2008).

Suatu definisi integral matematika juga diberikan oleh Bernhard Riemann. Yang didasarkan pada suatu prosedur pembatasan yang mendekati area suatu daerah kurva linier dengan patahan daerah ke dalam papan-papan vertikal.

Di dalam analisis real di kenal juga adanya *Integral Darboux*. *Integral Darboux* pertama kali dikembangkan oleh Gaston Darboux. *Integral Darboux* berawal dari kesulitan untuk memperlihatkan bahwa semua fungsi monoton adalah terintegral dan menunjukkan bahwa hasil fungsi yang terintegral adalah terintegral juga dengan menggunakan definisi *Integral Riemann*. Oleh karena itu digunakan *Integral Darboux* yang lebih sederhana. Pada *Integral Darboux* kita dapat menunjukkan semua bagian yang berada pada *Integral*

Riemann dan akan mudah membuktikan bahwa fungsi monoton adalah terintegral. Pada dasarnya *Integral Darboux* adalah sama dengan *Integral Riemann.*

$$R\int_a^b f = D\int_a^b f$$

Artinya bahwa suatu fungsi dikatakan *terintegral Darboux* jika dan hanya jika ia juga merupakan *terintegral Riemann*, dan jika nilai-nilai integral dari keduanya ada, maka bersifat sama. *Integral Darboux* mempunyai keuntungan lebih sederhana dibanding *Integral Rieman*. (*www..wikipedia.org/wiki/**Darboux_integral.*** Di akses tanggal 13 Juli 2009)

Adapun tentang sesuatu yang mempunyai nilai yang sama tersebut dijelaskan juga dalam Al-qur'an dalam surat An-Nisa ayat 32 tentang kesetaraan antara laki-laki dan perempuan yang hampir sama konsepnya dengan *Integral Riemann dan Darboux*. Meski pada dasarnya perempuan dikatakan sama dengan laki-laki tapi tetap laki-laki lah yang bisa menjadi pemimpin. Demikian juga dengan *Integral Darboux*, meski mempunyai nilai yang sama dengan *Integral Riemann*, tapi tetaplah *Integral Riemann* yang menjadi acuan karena *Integral Darboux* merupakan perluasan dari *Integral Riemann.*

وَلَا تَتَمَنَّوْا۟ مَا فَضَّلَ ٱللَّهُ بِهِۦ بَعْضَكُمْ عَلَىٰ بَعْضٍ ۚ لِّلرِّجَالِ نَصِيبٌ مِّمَّا
ٱكْتَسَبُوا۟ ۖ وَلِلنِّسَآءِ نَصِيبٌ مِّمَّا ٱكْتَسَبْنَ ۚ وَسْـَٔلُوا۟ ٱللَّهَ مِن فَضْلِهِۦٓ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ
كَانَ بِكُلِّ شَىْءٍ عَلِيمًا ﴿٣٢﴾

Artinya:" Dan janganlah kamu iri hati terhadap apa yang dikaruniakan Allah kepada sebahagian kamu lebih banyak dari sebahagian yang lain. (karena) bagi orang laki-laki ada bahagian dari pada apa yang mereka usahakan, dan bagi Para wanita (pun) ada bahagian dari apa yang mereka usahakan, dan mohonlah kepada Allah sebagian dari karunia-Nya. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui segala sesuatu"(An-Nisa:32).

Berdasarkan uraian diatas, maka penulis ingin mengkaji lebih dalam permasalahan ini dan membahasnya dengan judul **"EKUIVALENSI INTEGRAL RIEMANN DAN INTEGRAL DARBOUX"**

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dalam pembahasan ini, akan diberikan rumusan masalah

1. Bagaimana bukti ekuivalensi *Integral Riemann* dan *Integral Darboux*?
2. Bagaimana bukti sifat-sifat *Integral Darboux*?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. Untuk membuktikan ekuivalensi *Integral Riemann* dan *Integral Darboux*
2. Untuk membuktikan sifat-sifat *Integral Darboux*.

1.4. Batasan Masalah

Pada penulisan skripsi ini, permasalahan hanya dibatasi pada Integral Riemann dan Integral Darboux serta pada interval [a,b].

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian untuk skripsi ini antara lain:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan mengenai kaitan *Integral Riemann* dan *Integral Darboux*.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya bidang fungsi analisis.

1.7. Metode Penelitian

Metode yang digunakan oleh penulis dalam menyusun skripsi ini adalah metode kajian pustaka, yaitu deskripsi teoritis tentang objek yang diteliti dengan cara mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber bacaan, buku-buku referensi atau hasil penelitian lain) untuk menunjang penelitian. (Iqbal Hasan.2002: 45).

Adapun langkah-langkah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Merumuskan masalah. Sebelum penulis memulai kegiatannya, penulis membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan data dan informasi dengan cara membaca dan memahami beberapa literatur yang berkaitan dengan Integral baik itu *Rieman* maupun *Darboux.* Diantara buku yang digunakan penulis adalah Pengantar Analisis Real, Kalkulus dan Geometri Analitis serta buku lain yang menunjang penulisan skripsi ini.

3. Setelah memperoleh data-data dan informasi mengenai Integral *Darboux* dan *Riemann,* langkah selanjutnya adalah membuktikan Ekuivalensi baik itu dari *Integral Riemann* ke *Integral Darboux* atau sebaliknya dengan menggunakan teorema yang telah ada kemudian menjelaskan dan melengkapi bukti tersebut. Langkah selanjutnya yaitu membuktikan sifat-sifat dari *Integral Darboux* dengan menerapkan sifat-sifat dari Integral Riemann.
4. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan gambaran langkah dari pembahasan atas apa yang sedang ditulis. Kesimpulan didasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari permasalahan yang dikemukakan.

1.8. Sistematika Pembahasan

Sistematika pembahasan merupakan rangkaian urutan dari beberapa uraian penjelasan dalam suatu karya ilmiah. Dalam kaitannya dengan penulisan skripsi ini, kami menyusun sistematika pembahasan sebagai berikut.

Pada bab pertama dipaparkan bagaimana latar belakang terjadinya ekuivalensi antara *Integral Riemann* dan *Integral Darboux*, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat penelitian serta metode penelitian yang dipakai oleh penulis.

Pada bab dua dipaparkan berbagai teori yang dipakai untuk menunjang pembahasan dalam bab tiga juga memaparkan integrasi antara ekuivalensi

Integral Riemann dan Integral Darboux. Pada bab selanjutnya yakni bab tiga dipaparkan hasil penelitian penulis bagaimana proses terjadinya ekuivalensi antara *Integral Riemann dan Integral Darboux* serta sifat-sifat ekuivalensi *Integral Riemann dan Integral Darboux.*

Pada bab terakhir dipaparkan kesimpulan dari penelitian yang dilakukan oleh penulis.

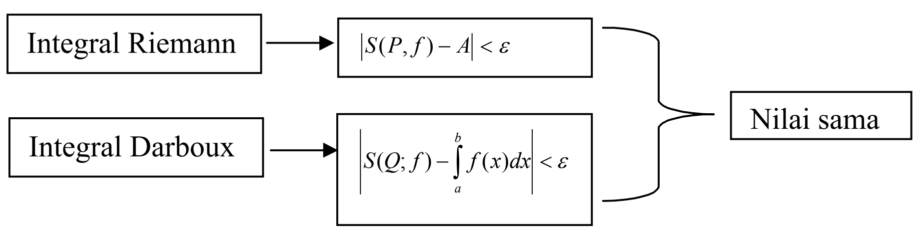
BAB II

KAJIAN TEORI

2.1. Konsep Ekuivalensi Dalam Islam

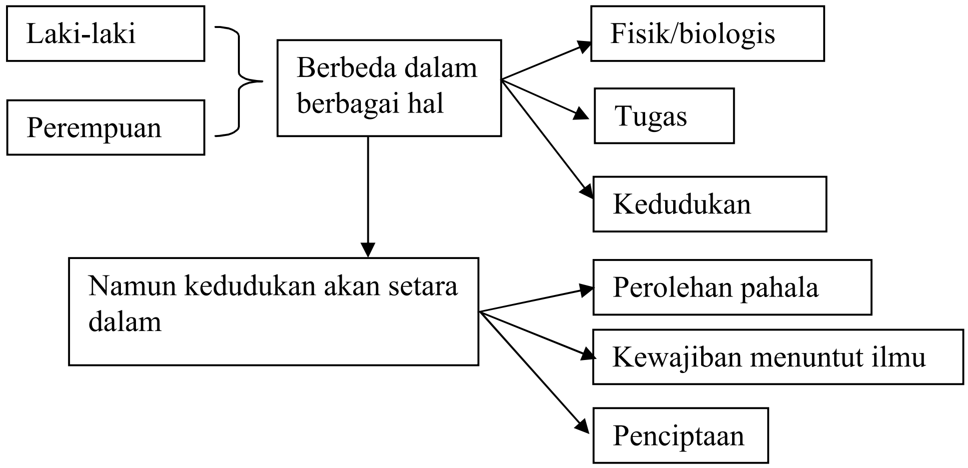
Ekuivalensi mempunyai arti setara atau mempunyai nilai yang sama. Meski keduanya berbeda, tapi mempunyai nilai yang sama.

Untuk kaitan integrasi agama dan kajian skripsi ini penulis mengaitkan integrasinya dengan kesetaraan antara laki-laki dan perempuan. Pada dasarnya laki-laki dan perempuan memang berbeda, tapi keduanya mempunyai nilai yang sama dalam beberapa hal. Konsep ini sama dengan konsep ekuivalensi *Integral Riemann dan Integral Darboux.* Seperti diperlihatkan dalam diagram berikut:



Dalam Islam terutama dalam Al-qur'an banyak menjelaskan tentang kesetaraan atau sesuatu yang berbeda, tapi pada akhirnya bernilai sama

Nilai-nilai tersebut antara lain nilai kemanusiaan, keadilan, kemerdekaan, kesetaraan dan sebagainya. Berkaitan dengan nilai keadilan dan kesetaraan, Islam tidak pernah mentolerir adanya perbedaan atau perlakuan diskriminasi diantara umat manusia.



Banyak ayat al-Qur’an yang telah menunjukkan bahwa laki-laki dan perempuan adalah sama-sama semartabat sebagai manusia, terutama secara spiritual. Begitu pula, banyak hadis yang menunjukkan kesamaan harkat laki-laki dan perempuan. Dalam pandangan agama Islam, segala sesuatu diciptakan Allah dengan kodrat

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ٤٩

Artinya: ” Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”

(Al-Qomar: 49).

.Ada beberapa hal yang mencakup kesetaraan antara laki-laki dan perempuan antara lain:

- Dalam hal penciptaan

Al-Qur’an tidak membedakan perempuan dan laki-laki dalam konteks penciptaan dan proses selanjutnya sebagai manusia. Dalam pandangan al-Qur’an, Allah menciptakan semuanya (perempuan dan laki-laki) adalah *“untuk satu tujuan”* seperti yang tertulis dalam Firman Allah:

وَمَا خَلَقْنَا ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَآ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۗ وَإِنَّ ٱلسَّاعَةَ لَءَاتِيَةٌ ۖ
فَٱصْفَحِ ٱلصَّفْحَ ٱلْجَمِيلَ ﴿٨٥﴾

Artinya:”Dan tidaklah kami ciptakan langit dan bumi dan apa yang ada di antara keduanya, melainkan dengan benar. dan Sesungguhnya saat (kiamat) itu pasti akan datang, Maka maafkanlah (mereka) dengan cara yang baik(Al-Hijr: 85)

Dalam surat lain juga disebutkan tentang penciptaan laki-laki dan perempuan yang menyatakan tidak ada perbedaan. Seperti yang termaktub dalam surat Al-Isro ayat 70:

وَلَقَدْ كَرَّمْنَا بَنِىٓ ءَادَمَ وَحَمَلْنَٰهُمْ فِى ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ وَرَزَقْنَٰهُم مِّنَ ٱلطَّيِّبَٰتِ
وَفَضَّلْنَٰهُمْ عَلَىٰ كَثِيرٍ مِّمَّنْ خَلَقْنَا تَفْضِيلًا ﴿٧٠﴾

Artinya:”Dan Sesungguhnya Telah kami muliakan anak-anak Adam, kami angkut mereka di daratan dan di lautan. kami beri mereka rezki dari yang baik-baik dan kami lebihkan mereka dengan kelebihan yang Sempurna atas kebanyakan makhluk yang Telah kami ciptakan”.

Adapun tentang kedudukan laki-laki dan perempuan Allah menjelaskan dalam beberapa surat dalam Al-qur’an antara lain Surat Ali-Imran ayat 195:

فَٱسْتَجَابَ لَهُمْ رَبُّهُمْ أَنِّى لَآ أُضِيعُ عَمَلَ عَٰمِلٍ مِّنكُم مِّن ذَكَرٍ أَوْ أُنثَىٰ ۖ بَعْضُكُم
مِّنۢ بَعْضٍ ۖ فَٱلَّذِينَ هَاجَرُوا۟ وَأُخْرِجُوا۟ مِن دِيَٰرِهِمْ وَأُوذُوا۟ فِى سَبِيلِى وَقَٰتَلُوا۟ وَقُتِلُوا۟

لَأُكَفِّرَنَّ عَنۡهُمۡ سَيِّـَٔاتِهِمۡ وَلَأُدۡخِلَنَّهُمۡ جَنَّـٰتٖ تَجۡرِي مِن تَحۡتِهَا ٱلۡأَنۡهَٰرُ ثَوَابٗا مِّنۡ عِندِ ٱللَّهِۚ وَٱللَّهُ عِندَهُۥ حُسۡنُ ٱلثَّوَابِ ١٩٥

Artinya:"Maka Tuhan mereka memperkenankan permohonannya (dengan berfirman): "Sesungguhnya Aku tidak menyia-nyiakan amal orang-orang yang beramal di antara kamu, baik laki-laki atau perempuan, (karena) sebagian kamu adalah turunan dari sebagian yang lain. Maka orang-orang yang berhijrah, yang diusir dari kampung halamannya, yang disakiti pada jalan-Ku, yang berperang dan yang dibunuh, Pastilah akan Ku-hapuskan kesalahan-kesalahan mereka dan Pastilah Aku masukkan mereka ke dalam surga yang mengalir sungai-sungai di bawahnya, sebagai pahala di sisi Allah. dan Allah pada sisi-Nya pahala yang baik."

Ayat-ayat tersebut memuat bahwa Allah SWT secara khusus menunjuk baik kepada perempuan maupun lelaki untuk menegakkan nilai-nilai islam dengan beriman, bertaqwa dan beramal. Allah SWT juga memberikan peran dan tanggung jawab yang sama antara lelaki dan perempuan dalam menjalankan kehidupan spiritualnya. Dan Allah pun memberikan sanksi yang sama terhadap perempuan dan lelaki untuk semua kesalahan yang dilakukannya. Jadi pada intinya kedudukan dan derajat antara lelaki dan perempuan dimata Allah SWT adalah sama, dan yang membuatnya tidak sama hanyalah keimanan dan ketaqwaannya(http://www.lbh-apik.or.id/fact%2054.kesetaraangenderdalamAl-qura'n.htm. Diakses tanggal 13 Juli 2009).

- Dalam hal perolehan pahala dalam beribadah

Menurut surat Al-Dzariat ayat 56:

وَمَا خَلَقۡتُ ٱلۡجِنَّ وَٱلۡإِنسَ إِلَّا لِيَعۡبُدُونِ ٥٦

Artinya:"Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku".

Dalam kapasitas sebagai hamba tidak ada perbedaan antara laki-laki dan perempuan. Keduanya mempunyai potensi dan peluang yang sama untuk menjadi hamba ideal. Hamba ideal dalam Al-qur'an biasa diistilahkan sebagai orang-orang yang bertaqwa, dan untuk mencapai derajat taqwa ini tidak dikenal adanya perbedaan jenis kelamin, suku bangsa atau kelompok etnis tertentu sebagaimana disebutkan dalam surat Al-Hujurat ayat 13.

Dari kutipan ayat di atas jelas bahwa Allah memberikan peluang yang seluas-luasnya bagi perempuan untuk menjalankan tugas-tugasnya asalkan masih dalam batas-batas yang tidak keluar dari ayat tersebut.

Menurut ajaran al-Qur'an, pengabdian kepada Allah tidak bisa dipisahkan dari pengabdian kepada umat manusia, atau, dalam istilah Islam, orang-orang yang beriman kepada Allah harus menghormasti *Haqqullah* (hak-hak Allah) dan *Haqul 'Ibad* (hak-hak makhluq). Pemenuhan kewajiban kepada Tuhan dan manusia merupakan hakekat kesalehan. Laki-laki dan perempuan sama-sama diseru oleh Allah agar berbuat kebajikan dan akan diberi pahala yang sma untuk kesalehan mereka. Hal ini dinyatakan dengan jelas dalam sejumlah ayat al-Qur'an seperti berikut :

فَٱسۡتَجَابَ لَهُمۡ رَبُّهُمۡ أَنِّي لَآ أُضِيعُ عَمَلَ عَٰمِلٖ مِّنكُم مِّن ذَكَرٍ أَوۡ أُنثَىٰۖ بَعۡضُكُم مِّنۢ
بَعۡضٖۖ فَٱلَّذِينَ هَاجَرُواْ وَأُخۡرِجُواْ مِن دِيَٰرِهِمۡ وَأُوذُواْ فِي سَبِيلِي وَقَٰتَلُواْ وَقُتِلُواْ

لَأُكَفِّرَنَّ عَنْهُمْ سَيِّـَٔاتِهِمْ وَلَأُدْخِلَنَّهُمْ جَنَّٰتٍ تَجْرِى مِن تَحْتِهَا ٱلْأَنْهَٰرُ ثَوَابًا مِّنْ عِندِ
ٱللَّهِ ۗ وَٱللَّهُ عِندَهُۥ حُسْنُ ٱلثَّوَابِ ﴿١٩٥﴾

Artinya:"Maka Tuhan mereka memperkenankan permohonannya (dengan berfirman): "Sesungguhnya Aku tidak menyia-nyiakan amal orang-orang yang beramal di antara kamu, baik laki-laki atau perempuan, (karena) sebagian kamu adalah turunan dari sebagian yang lain[259]. Maka orang-orang yang berhijrah, yang diusir dari kampung halamannya, yang disakiti pada jalan-Ku, yang berperang dan yang dibunuh, Pastilah akan Ku-hapuskan kesalahan-kesalahan mereka dan Pastilah Aku masukkan mereka ke dalam surga yang mengalir sungai-sungai di bawahnya, sebagai pahala di sisi Allah. dan Allah pada sisi-Nya pahala yang baik."(Q.S. Ali-Imron: 195)

وَٱلْمُؤْمِنُونَ وَٱلْمُؤْمِنَٰتُ بَعْضُهُمْ أَوْلِيَآءُ بَعْضٍ ۚ يَأْمُرُونَ بِٱلْمَعْرُوفِ وَيَنْهَوْنَ عَنِ
ٱلْمُنكَرِ وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَيُؤْتُونَ ٱلزَّكَوٰةَ وَيُطِيعُونَ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥٓ ۚ أُو۟لَٰٓئِكَ
سَيَرْحَمُهُمُ ٱللَّهُ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ﴿٧١﴾

Artinya:"Dan orang-orang yang beriman, lelaki dan perempuan, sebahagian mereka (adalah) menjadi penolong bagi sebahagian yang lain. mereka menyuruh (mengerjakan) yang ma'ruf, mencegah dari yang munkar, mendirikan shalat, menunaikan zakat dan mereka taat pada Allah dan Rasul-Nya. mereka itu akan diberi rahmat oleh Allah; Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana"(Q.S. At-Taubah: 71)

Ayat-ayat di atas mengisyaratkan konsep kesetaraan laki-laki dan perempuan yang ideal dan memberikan ketegasan bahwa prestasi individu, baik dalam bidang spiritual maupun urusan karier profesional, tidak mesti dimonopoli oleh salah satu jenis kelamin saja.

- Dalam hal pendidikan

Dalam hal pendidikan mengenai kesetaraan antara laki-laki dan perempuanAllah menjelaskan dalam Al-Qur'an surat al-Mujadalah ayat 11 yakni:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

Artinya:"Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan"

Dari ayat tersebut, kita bisa memahami bahwa orang yang berilmu punya posisi yang berbeda dengan orang yang tidak berilmu. Ayat-ayat tersebut juga merupakan pendorong bagi umat Islam untuk selalu berusaha meningkatkan kualitas keilmuannya.

Dari ayat tersebut juga dapat kita pahami bahwa menuntut ilmu juga diwajibkan atas laki-laki dan perempuan. Karena dalam ayat tersebut tidak dijelaskan tentang kewajiban pada salah satu pihak.Dalam hal berprestasi Islam juga tidak membeda-bedakan antara laki-laki dan perempuan. Semuanya bisa berprestasi dalam segala hal.

Ketiganya mengisyaratkan konsep kesetaraan gender yang ideal dan memberikan ketegasan bahwa prestasi individual, baik dalam bidang spiritual maupun karier profesional, tidak mesti didominasi oleh satu jenis kelamin saja(http://www.lbh-apik.or.id/fact%2054.kesetaraangenderdalamAl-qura'n.htm. Diakses tanggal 13 Juli 2009).

2.2. Konsep Limit

Definisi 2.2.1. Jika f sebuah fungsi yang terdefinisi suatu selang terbuka yang memuat bilangan a, kecuali mungkin pada a itu sendiri. Maka dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati a adalah L, dan dituliskan

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (1)$$

Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan yang* $\delta > 0$ *sedemikian hingga*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ bilamana } 0 < |x - a| < \delta \qquad (2)$$

(Stewart; 1999: 105)

Contoh 2.2.1.1 Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4}(3x - 7) = 5$

Andaikan ε bilangan positif sebarang. Maka dihasilkan suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan disebelah kanan

$$|(3x - 7) - 5| < \delta \Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |3||x - 4| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(Purcell; 1987: 81)

Teorema 2.2.2. *diberikan* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ *dan a titik limit A. Jika f(x) mempunyai limit untuk* $x \rightarrow a$*, maka limitnya tunggal*

Bukti:

Ambil bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang dan andaikan *f(x)* mempunyai limit K dan L dengan $K \neq L$ untuk $x \rightarrow a$. Jadi untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ yang ditunjuk dapat dipilih bilangan $r_1 > 0$ dan bilangan $r_2 > 0$. Sehingga berlaku

$$|f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x-a| < r_1$ dan

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x-a| < r_2$. Selanjutnya dengan mengambil bilangan $r = \min\{r_1, r_2\}$ diperoleh

$$|K - L| = |K + f(x) - f(x) - L|$$

$$\leq |f(x) - L| + |K + f(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - a| < r$ dengan kata lain diperoleh K=L, suatu kontradiksi. Jadi yang benar limit *f(x)* untuk $x \to a$ adalah tunggal.

(Rahman; 2008:137-138)

Teorema 2.2.3. *Misalkan* $\lim_{x \to a} f(x) = K, \lim_{x \to a} g(x) = L$ *berlaku*

1. $\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha . \lim_{x \to a} f(x) = \alpha K$ untuk α sebarang konstanta α .

2. $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = K + L$

3. $\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = K.L$

4. $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{K}{L}$, jika $L \neq 0$

Bukti:

1. Diambil sebarang barisan bilangan nyata $\{x_n\}$ yang konvergen ke *a*. Oleh karena itu diperoleh barisan $\{f(x_n)\}$ dan barisan $\{g(x_n)\}$ berturut-turut konvergen ke K dan L, maka

$$\lim_{x \to a} f(x_n) = K, \lim_{x \to a} g(x_n) = L$$

Selanjutnya diperoleh

$$\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha . \lim_{x \to a} f(x) = \alpha . K$$

2. $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} (f + g)(x_n)$

$$= \lim_{x \to \infty} \{f(x_n) + g(x_n)\}$$

$$= \lim_{x \to \infty} f(x_n) + \lim_{x \to \infty} g(x_n)$$

$$= \mathrm{K} + \mathrm{L}$$

3. $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to\infty}(fg)(x)$

$$= \lim_{x\to\infty} f(x_n).\lim_{x\to\infty} g(x_n)$$

$$= K.L$$

4. $\lim_{x\to a}\frac{f}{g}(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

$$= \frac{K}{L}, \text{ asalkan } L \neq 0$$

Teorema 2.2.4.(Kriteria Limit): *Misalkan* $\boldsymbol{f : A \to R}$ *dan a merupakan titik limit himpunan A maka*

(i). $\lim_{x\to a} f = L$

(ii).Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $x \in A$ dan $0 < |x-a| < \delta$ berakibat $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Bukti:

(i) →(ii). Diketahui bahwa *f* mempunyai limit L pada *a*. Kemudian untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(a)$ dan $x \neq a$ berakibat $f(x) \in N_\delta(L)$. Kemudian karena *x* terdapat pada $N_\delta(a)$ dan $x \neq a$ jika dan hanya jika $0 < |x-a| < \delta$ karena $f(x) \in N_\varepsilon(L)$ jika dan hanya jika $|f(x) - L| < \varepsilon$ jadi jika $x \in A$ memenuhi $0 < |x-a| < \delta$ dan *f(x)* memenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(ii) →(i). Jika kondisi (ii) terpenuhi untuk $\delta > 0$ pada $N_\delta(a) := (a-\delta, a+\delta)$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ pada $N_\varepsilon(L) := (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ .Kemudian kondisi (ii) akan terpenuhi jika x berada pada $N_{\delta}(a)$ dimana $x \in A$ dan $x \neq a$ .Dan $f(x) \in N_{\varepsilon}(L)$ maka *f* mempunyai limit pada *a*.

Contoh 2.2.4.1:

$$\lim_{x \to a} b = b$$

Misal *f(x)* = *b* $\forall x \in \Re$ didefinisikan bahwa $\lim_{x \to a} f = b$. Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ maka $\delta = 1$. Kemudian jika $0 < |x - a| < 1$ terdapat $|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$. Karena memenuhi maka $\lim_{x \to a} f = b$

Seperti halnya Integral yang mempunyai batasan(Limit), yaitu batas atas dan batas bawah, maka dalam agama Islam pun terdapat beberapa batasan agar umat manusia tidak terjerumus dalam perbuatan dosa. Sejak awal manusia diciptakan yang ditugasi sebagai khalifah dimuka bumi ini Islam telah mengajarkan bagaimana tugas manusia itu di bumi hingga tidak melampau batas. Atau mengingkari apa yang telah menjadi tugasnya. Namun, ada pula manusia yang mengingkari tugasnya karena merasa tidak mampu.

Sebagian besar manusia mengklaim bahwa sangat sulit bagi mereka untuk melaksanakan ajaran agama dan itulah alasannya mengapa mereka tidak menjalankan prinsip-prinsip agama. Dengan cara ini, mereka berharap kesalahan mereka berkurang. Akan tetapi, mereka hanya membohongi diri mereka sendiri.

Allah sebagai penguasa alam tidak membebani seseorang diluar batas kemampuannya. Sebagaimana dikatakan dalam Al-qur’an:

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَآ إِن نَّسِينَآ أَوْ أَخْطَأْنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَآ إِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُۥ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن قَبْلِنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِۦ ۖ وَٱعْفُ عَنَّا وَٱغْفِرْ لَنَا وَٱرْحَمْنَآ ۚ أَنتَ مَوْلَىٰنَا فَٱنصُرْنَا عَلَى ٱلْقَوْمِ ٱلْكَٰفِرِينَ (286)

Artinya:"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'aflah Kami; ampunilah Kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir.(Q.S. Al-Baqarah: 286)"

Di dalam syariat Islam, semua perintah Allah sesuai dengan fitrah alami kemampuan manusia. berbagai perintah Tuhan yang diberikan pun masih dalam batas kemampuan dan kelemahan manusia. Oleh karena itu tiap manusia akan ditanya pertanggung-jawaban mereka masing-masing.

Namun, manusia meski dikatakan sebagai makhluk yang sempurna dalam beberapa hal juga mempunyai keterbatasan termasuk dalam ilmu pengetahuan. Meski kemampuannya terbatas Allah tetap menjanjikan akan meninggikan orang derajat orang yang giat menuntut ilmu.

Dalam surat Al-Mukminun ayat 62 juga disebutkan

وَلَا نُكَلِّفُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۖ وَلَدَيْنَا كِتَٰبٌ يَنطِقُ بِٱلْحَقِّ ۚ وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ (62)

Artinya:"Kami tiada membebani seseorang melainkan menurut kesanggupannya, dan pada sisi kami ada suatu Kitab yang membicarakan kebenaran, dan mereka tidak dianiaya".

Yang dimaksud kitab disini adalah kitab tempat malaikat menuliskan perbuatan seseorang biarpun buruk atau baik dihari kiamat.

2.3. Barisan dan Limit

Barisan pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domaian $\mathbb{N}$ dan mempunyai range dalam S.

Definisi 2.3.1. *Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan N dengan range dalam R.*

Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Apabila diketahui suatu barisan Y artinya $Y = (y_k)$.

(Riyanto;2008: 38)

Contoh 2.3.1.1

a). Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah barisan -1, 1, -1, 1, , $(-1)^n$,...

b). Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2^n}, \left(\frac{1}{2^n} : n \in N\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}$.

c). Barisan konstan (k_n) dengan $k_n = 3$ adalah 3,3,3....

Definisi 2.3.2 : *Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) dan $a \in R$. Maka dapat didefinisikan*

(i). $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$

(ii). $\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$

(iii). $(x_n).(y_n) = (x_n . y_n)$

(iv). $\dfrac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$, asalkan $y_n \neq 0$

(Riyanto;2008:39)

Definisi 2.3.3.(limit Barisan): *Diketahui* (x_n) *barisan bilangan real. Suatu bilangan real x dikatakan limit barisan*(x_n). *Jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $k \in N$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \in N$ *dengan* $n \geq k(\varepsilon)$ b*erlaku* $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika *x* adalah limit suatu barisan(x_n) , maka dikatakan (x_n) konvergen ke *x*. Dalam hal ini ditulis $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$ atau atau $x_n \to x$. Jika (x_n) tidak konvergen maka (x_n) dikatakan divergen.

(Riyanto;2008:39)

Teorema 2.3.4: *jika barisan*(x_n) *konvergen maka*(x_n) *mempunyai paling banyak satu limit(limitnya tunggal).*

Bukti:

Andaikan $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x'$ dan $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x''$ dengan $x' \neq x''$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian hingga $|x_n - x'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K'$ dan terdapat K'' sedemikian hingga $|x_n - x''| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K''$. Dipilih

$K = \max\{K', K''\}$. Menggunakan ketaksamaan segitiga, maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\left|x' - x''\right| = \left|x' - x_n + x_n - x''\right|$$

$$= \left|x' - x_n\right| + \left|x_n - x''\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x' - x'' = 0$ yang berarti $x' = x''$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi terbukti bahwa limitnya tunggal.

(Riyanto;2008:39-40)

Definisi 2.3.5(Teorema-Teorema Limit): *Barisan bilangan real* $X = (x_n)$ *dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real* $M > 0$ *sedemikian hingga* $|x_n| \leq M$ *untuk semua* $n \in N$.

Oleh karena itu barisan (x_n) jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in N\}$ merupakan subset terbatas dalam R

(Riyanto;2008: 45)

Teorema 2.3.6 : *Diketahui* $X = (x_n)$ *konvergen, maka* $X = (x_n)$ *terbatas.*

Bukti:

Diketahui $X = (x_n)$ konvergen, misalkan konvergen ke *x*. Diambil $\varepsilon = 1$. Maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < 1$. Menggunakan ketaksamaan segitiga, maka $|x_n| - |x| < 1$ atau $|x_n| < 1 + |x|$ untuk semua $n \geq K$. Namakan $M = \max\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}, |x|+1\}$. Maka $|x_n| < M$ untuk semua $n \in N$. Jadi terbukti bahwa $X = (x_n)$ terbatas.

Teorema 2.3.7: *Jika* $X = (x_n) \rightarrow x$ *,* $Y = (y_n) \rightarrow y$ *dan* $c \in R$ *maka*

(i). $X \pm Y \rightarrow x \pm y$

(ii). $X.Y \rightarrow x.y$

(ii). *cX= cx*

Bukti:

(i). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena $X = (x_n) \rightarrow x$ maka terdapat $n_0 \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena $Y = (y_n) \rightarrow y$, maka terdapat $n \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pilih $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, maka akibatnya untuk $n \geq n_2$ berlaku

$$|x_n - y_n - (x - y)| = |(x_n - x) + (y_n + y)|$$

$$\leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $(x_n + y_n)$ konvergen ke $x + y$. Dengan cara yang sam diperoleh bahwa $(x_n - y_n)$ konvergen ke $x - y$. Jadi terbukti bahwa $X \pm Y \rightarrow x \pm y$.

(ii). Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n.y_n - x.y| < \varepsilon$. Diketahui

$$|x_n.y_n - x.y| = |x_n.y_n - x_n.y + x_n.y - x.y|$$

$$\leq |x_n.y_n - x_n.y| + |x_n - xy|$$

$$= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$$

Karena $(x_n) \to x$ maka (x_n) terbatas, akibatnya terdapat $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M_1$, untuk semua $n \in N$. Namakan $M = \max\{M, |y|\}$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \to x$ maka terdapat $K_1 \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Karena $(y_n) \to y$ maka terdapat $K_2 \in N$. Sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Namakan $K = \max\{K_1, K_2\}$ maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$$

$$< M.\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}.M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$.

Dengan kata lain terbukti bahwa $X.Y \to x.y$.

(iii). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena $(x_n) \to x$ maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Perhatikan bahwa

$$|cx_n - x| = |cx_n - x_n + x_n - x|$$

$$\leq |cx_n - x_n| + |x_n - x|$$

$$= |x_n||c-1| + |x_n - x|$$

Karena $(x_n) \to x$ maka (x_n) terbatas, yaitu terdapat $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \le M$ untuk semua $n \in N$ akibatnya

$$|x_n||c-1| + |x_n - x| < M|c-1| + \frac{\varepsilon}{2} = (M.|c-1|) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \ge K$ berlaku $|C_{nx} - x| < \varepsilon$. Dengan kata lain terbukti bahwa *cX*= *cx.*

(Riyanto;2008: 45-47)

Teorema 2.3.8 : *jika* $X = (x_n)$ *barisan bilangan real dengan* $x_n \ge 0$ *untuk semua* $n \in N$ *dan* $(x_n) \to x$ *maka* $x \ge 0$.

Bukti:

Diambil $\varepsilon = -x > 0$ karena $(x_n) \to x$ maka terdapat $K \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \ge K$ berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x - (-x) < x_n < x + (-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x < x_n < 0$$

Kontradiksi dengan pernyataan bahwa $x_n \ge 0$, untuk semua $n \in N$. Jadi pengandaian salah, yang benar adalah $x \ge 0$.

(Riyanto;2008: 48)

Teorema 2.3.9: *Jika* $(x_n) \to x, (y_n) \to y$ *dan* $x_n \le y_n$ *untuk semua* $n \in N$ *maka* $x \le y$

Bukti:

Diberikan $Z_n := y_n - x_n$ sehingga $Z := (z_n) = Y - X$ dan $Z_n \ge 0$ untuk semua $n \in N$. Diperoleh bahwa $0 \le \lim Z = \lim(y_n) - \lim(x_n)$ atau $\lim(x_n) \le \lim(y_n)$.

(Riyanto;2008: 48-49)

2.4. Konsep Kontinu

Definisi 2.4.1. *f dikatakan kontinu pada* x_0 *jika* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *atau bisa dikatakan untuk* $\varepsilon > 0$ *maka ada* $\delta > 0$ *sehingga* $|f(x) - f(x_0) < \varepsilon|$ *dimana* $|x - x_0| < \delta$

Dari definisi di atas maka dapat dikatakan terdapat tiga syarat agar kontinu terpenuhi, yaitu:

1. $f(x_0)$ ada atau terdefinisikan
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ada, dan
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(Parzynski & Zipse;1982:94)

Contoh 2.4.1.1. Diberikan fungsi

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & untuk \quad x \ne 1 \\ A & untuk \quad x = 1 \end{cases}$$

Cari $\lim_{x \to 1} g(x)$ dan tentukan nilai A agar fungsi g kontinu di 1, maka

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Menurut yang diketahui $1 \in A$ dan $g(1) = A$. Oleh karena itu agar fungsi g kontinu di 1, harus berlaku

$$A = g(1) = \lim_{x \to 1} g(x) = 2$$

Lebih lanjut, untuk $x \neq 1$ rumus fungsi g dapat disederhanakan menjadi $g(x) = x + 1$ dan dengan rumus ini mudah diperlihatkan bahwa fungsi g kontinu disetiap titik $x \neq 1$. Digabung dengan hasil di atas, yaitu dengan mengambil *A= 2* maka fungsi *g* kontinu pada *R*.

Mengenai fungsi kontinu sesuai dengan amal ibadah yang apabila dilakukan secara kontinu dan terus menerus akan mendapatkan pahala. Seperti halnya fungsi yang kontinu ia akan punya nilai pada titik tertentu.

Dalam hadist telah disebutkan

!! !!! !!!! ! !!!!! ! !!! ‼ ! ! ‼ !!! ‼ !! ! ‼ !È!! ! !!!! ! ! ! !!!!! ! ! !ƒ!! !!! ! ƒ!

!!! !!! ‼ !!!! ! !

"Lakukanlah amal sesuai kesanggupan. Karena sesungguhnya Allah tidak akan bosan sehingga engkau menjadi bosan. Dan sesungguhnya amal yang paling Allah sukai ialah yang terus-menerus dikerjakan walaupun sedikit." (HR Abu Dawud 1161)

Allah juga berfirman dalam surat Ibrahim ayat 33

وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلشَّمۡسَ وَٱلۡقَمَرَ دَآئِبَيۡنِۖ وَسَخَّرَ لَكُمُ ٱلَّيۡلَ وَٱلنَّهَارَ ٣٣

Artinya:"Dan dia Telah menundukkan (pula) bagimu matahari dan bulan yang terus menerus beredar (dalam orbitnya); dan Telah menundukkan bagimu malam dan siang".

Maksud ayat tersebut adalah bahwa matahari dan bulan juga beredar secara kontinu dalam orbitnya hingga hari kiamat yang bisa dikatakan ia keluar dari orbitnya.

2.5. Supremum dan Infimum

Definisi 2.4.1. *Misalkan S suatu himpunan bagian dari R*

(i) *Bilangan* $u \in R$ *dikatakan* ***batas atas*** *S jika* $s \leq u$ *untuk setiap* $s \in S$

(ii) *Bilangan* $w \in R$ *dikatakan* ***batas bawah*** *S jika* $w \leq s$ *untuk setiap* $s \in S$

Contoh 2.5.1.1

Diberikan $S := [0,1]$, maka batas atas S adalah himpunan $\{x : x \leq 0\}$ dan batas bawah S adalah $\{x : x \geq 1\}$. Diperhatikan 0 merupakan batas bawah dan termasuk di dalam *S*, sedangkan 1 batas atas, tetapi ia tidak termuat di dalam *S*

(Hernadi; 2000:17)

Definisi 2.5.2. *Diberikan S subset tak kosong* $\mathbb{R}$

1. Jika *S* terbatas ke atas, maka suatu himpunan bilangan *u* disebut supremum (batas atas terkecil) dari *S* jika memenuhi kondisi.

   (1). *u* merupakan batas atas *S* dan

   (2). Jika *v* adalah sebarang batas atas *S* maka $u \leq v$

   Ditulis $u = \sup S$

2. Jika *S* terbatas ke bawah, maka suatu bilangan *u* disebut infimum(batas bawah terbesar) dari *S* jika memenuhi kondisi berikut

   (1). *w* merupakan batas bawah *S* dan

(2). Jika t adalah sebarang batas bawah S, maka $t \leq w$

Ditulis $w = inf$ S.

(Riyanto;2008: 18)

Contoh 2.5.2.1

a. Himpunan $E = \left\{1, \frac{1}{2,}, \frac{1}{3}, ..\right\} = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in N\right\}$ terbatas di atas oleh sebarang bilangan real $v \geq 1$ dan terbatas dibawah oleh sebarang bilangan real $u \leq 0$. Batas atas terkecil adalah 1 dan batas bawah terbesar adalah 0.

b. $f(x) = \frac{x}{n}$, $n \in N \;\&\; x \in R$ mempunyai batas atas tak hingga dan batas bawahnya negatif takhingga.

Dengan demikian $\frac{x}{n}$ mempunyai supremum 1 dan infimum 0.

Dari definisi di atas muncul sebuah lemma

Lemma 2.5.3. *Supremum suatu himpunan selalu tunggal*

Bukti:

Andaikan u = sup S dan $u_1 = \sup S$ dengan $u \neq u_1$. Karena itu ada 2 kemungkinan yang dapat terjadi, yaitu $u < u_1$ atau $u > u_1$ berarti u bukan batas atas S, ini berlawanan dengan u = sup S. Untuk $u > u_1$ berarti u_1 bukan batas atas S. Ini bertentangan dengan $u_1 = \sup S$. Jadi pengandaian $u \neq u_1$ salah. Seharusnya $u = u_1$.

(Hernadi; 2000:17)

Berikut adalah kriteria yang sering digunakan untuk mengetahui suatu batas atas merupakan supremum atau bukan.

Teorema 2.5.4: . *Misalkan u suatu batas atas S.*

$\Rightarrow$ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena diketahui u = sup S, maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas S, jadi ada $s \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s$

$\Leftarrow$ akan ditunjukkan bahwa u yang memenuhi sebelah kanan merupakan supremum *S.* Misalkan untuk sebarang bilangan real *v*, $v < u$. Ambil $\varepsilon := u - v > 0$ maka ada $s \in S$ sehingga $u - \varepsilon = u - (u - v) = u < s$

Ini berarti v bukan batas atas S dan berdasarkan karakteristik supremum disimpulkan bahwa $u = \sup S$

(Hernadi; 2000:17)

Al-qur'an sebagai kitab suci umat Islam dapat dikatakan sebagai supremum. Selain sebagai pedoman, Al-qur'an juga merupakan acuan sekaligus sumber ilmu pengetahuan. Sebagai contoh penemuan manusia dalam bidang sains, dahulu orang menyangka bahwa atom adalah partikel terkecil, karena mereka belum menemukan elektron. Tapi kemudian ditemukan lagi yang lebih kecil yakni quark. Simpulannya, sains hanya dapat menjangkau sebahagian kecil dari apa yang ditantangkan Alquran.

Lebih lanjut terdapat ayat berikut:

ٱلَّذِى خَلَقَ سَبْعَ سَمَٰوَٰتٍ طِبَاقًا ۖ مَّا تَرَىٰ فِى خَلْقِ ٱلرَّحْمَٰنِ مِن تَفَٰوُتٍ ۖ فَٱرْجِعِ
ٱلْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ﴿٣﴾ ثُمَّ ٱرْجِعِ ٱلْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ ٱلْبَصَرُ خَاسِئًا
وَهُوَ حَسِيرٌ ﴿٤﴾

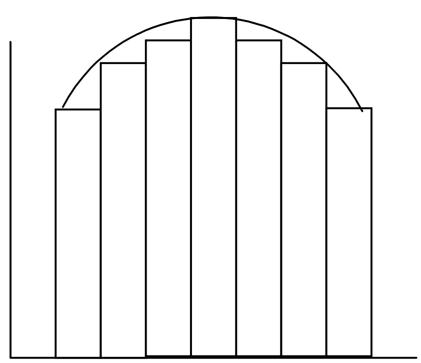
Artinya:"Dialah Allah yang menciptakan tujuh langit belapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat ciptaan Allah Yang Maha Rahman itu seuatu yang *tidak seimbang. Maka perhatikanlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang? Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan kesimpulan bahwa tidak ada yang cacat dan pengamatanmu itupun dalam keadaan payah".(QS. Al-Mulk 3-4)*

Ayat di atas di samping sebagai perintah, juga berkesan sebagai tantangan. Penekanan yang hendak digarisbawahi dari ayat ini adalah,"niscaya penglihatan (observasi)-mu itu akan kembali kepadamu dengan keadaan payah".

2.6. Luas daerah dan Integral Riemann

2.6.1. Luas daerah

Pada tahun 1630-an Pierre de Fermat tertarik untuk menghitung luas daerah dibawah kurva. Misalkan *f* kontinu pada interval [a,b]. Untuk membahas luas daerah dibawah kurva $y = f(x)$ maka luas daerah setidaknya lebih besar dari pada L.



Gambar 2.5.1.1 luas daerah L

Misalkan L menyatakan himpunan semua bilangan L yang dapat diperoleh sebagai jumlah luas daerah persegi panjang kecil sebagaimana dalam gambar di atas. Maka luas daerah dibawah kurva $y = f(x)$ mestilah lebih besar dari pada setiap anggota L.

Maka didefinisikan luas daerah dibawah kurva *y = f(x)* sebagai bilangan terkecil yang lebih besar dari pada setiap anggota L, yakni sup L.

(Gunawan; 2000: 113-114)

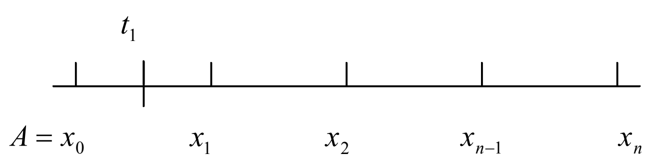
2.6.2. Integral Riemann

2.6.2.1. Partisi

Misalkan $f : I \to R$ terbatas dan $P := \{x_0, x_1, .., x_n\}$ partisi dari I pada selang [a,b] suatu himpunan berhingga $\{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$

Sedemikian hingga

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$



gambar 2.6.2.1 Partisi Pada [a,b]

Norma partisi P yang dinyatakan dengan $\|P\|$ nilai terbesar diantara bilangan $(x_i - x_{i-1}), i = 1,2,..n.$ Kemudian didefinisikan

$$\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}.... \qquad (4)$$

Jika P adalah partisi seperti yang tampak pada gambar di atas, maka definisi jumlah *Riemann* pada fungsi $f : I \to R$

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{5}$$

(Bartle; 2000:194-195)

Definisi 2.6.2.1.1. *Diberikan interval tertutup [a,b], partisi Q disebut penghalus (refinement) partisi P pada [a,b] jika* $P \subseteq Q$.

Untuk suatu interval [a,b] tak berhingga banyak partisi yang dapat dibuat. Koleksi semua partisi pada interval [a,b] dinotasikan dengan $\mathcal{P}$[a,b].

Contoh 2.6.2.1.1.1:

Diberikan interval *I*=[0,1]. Berikut ini adalah beberapa partisi pada *I*.

$$P_1=\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}, P_2=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}, P_3=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}, P_4=\left\{0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6},1\right\}$$
$$P_5=\left\{0,\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{4}{8},\frac{5}{8},\frac{6}{8},\frac{7}{8},1\right\}=\left\{0,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{2}{4},\frac{5}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8},1\right\}$$

Dapat dihitung bahwa $\|P_1\|=\frac{3}{4}, \|P_2\|=\frac{1}{2}, \|P_3\|=\frac{1}{4}$

P_5 merupakan penghalus dari P_3 sebab $P_3 \subseteq P_5$ tetapi P_5 bukan penghalus P_2 maupun P_4 sebab $P_2 \not\subset P_5$ dan $P_4 \not\subset P_5$. Partisi P_3, P_4 dan P_5 di sebut partisi seragam

(Herawan-Thobirin; 2008).

Teorema 2.6.2.1.2. *Untuk setiap bilangan real* $\delta > 0$ *terdapat partisi P pada [a,b] sehingga*

$$\|P\| < \delta \tag{6}$$

Diberikan interval tertutup [a,b]. Karena a < b , maka berdasarkan sifat urutan bilangan real diperoleh $b-a>0$. Oleh karenanya sembarang $\delta>0$ dan berdasarkan sifat archimedes, terdapat bilangan asli *n* sehingga

$$\frac{b-a}{n}<\delta$$

Jadi pada interval [a,b] dapat dibuat partisi

$P=\{a=x_0,x_1,x_2,...,x_n=b;\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$ demikian sehingga $\|P\|<\delta$

(Herawan-Thobirin; 2008).

2.6.2.2 Jumlah Riemann Atas dan Jumlah Riemann Bawah

Definisi 2.6.2.2.1 *Misalkan A partisi P dari [a,b] adalah terbatas. Untuk setiap subinterval* $[x_{k-1},x_k]$ *dari P maka*

$$m_k=\inf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}\ dan\ M_k=\sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}$$

Sehingga Jumlah *Integral Riemann* atas dari *f* dengan partisi *P* adalah

$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}mk(x_k-x_{k-1}) \qquad (7)$$

Sedangkan jumlah *Integral Riemann* bawah adalah

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1}) \qquad (8)$$

Dengan $m_k:=\inf f(I_k)$ dan $M_k:=\sup f(I_k)$. Akibatnya

$$\sum_{k=1}^{n}m_k(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})$$

Yakni

$$L(P;f)\le S(P;f)\le U(P;f)$$

2.6.2.3. Integral Riemann Atas dan Integral Riemann bawah

$\sup\limits_{P \in \rho[a,b]} L(P,f)$ dinyatakan dengan $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ atau $\underline{\int_a^b} f$ dan dinamakan *Integral Riemann* bawah fungsi *f* pada selang [a,b].

$\inf\limits_{P \in \rho[a,b]} L(P,f)$ dinyatakan dengan $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ atau $\overline{\int_a^b} f$ dan dinamakan *Integral Riemann* atas fungsi *f* pada selang [a,b].

Fungsi *f* dikatakan terintegral *Riemann* pada selang [a,b], jika

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Dalam hal fungsi *f* terintegral *Riemann* pada selang [a,b], *Integral Riemann* atas (yang sama dengan *Integral Riemann* bawah) dinamakan *Integral Riemann* fungsi *f* pada [a,b], dan dinyatakan dengan notasi

$$\int_a^b f(x)dx \text{ atau } \int_a^b f$$

Contoh 2.6.2.3.1:

Perlihatkan bahwa fungsi *f(x)= x,* $0 \le x \le 1$ terintegral *Riemann* pada [0,1].

Ambilah $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$, maka $m_k = \frac{k-1}{n}$, $M_k = \frac{k}{n}$, *k = 1,2,..,n.*

$$L(P_n; f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} . \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$U(P_n; f) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} . \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Karena $\{P_n : n \in N\} \subseteq \{P : P \in \mathrm{P}[a,b]\}$, maka

$$\frac{1}{2}=\sup_{n\in N} L(P_n,f)\le \sup_{P\in \mathrm{P}[a,b]} L(P,f)\le \inf U(P,f)\le \inf U(P_n,f)=\frac{1}{2}$$

Sehingga $\underline{\int_0^1} f(x)dx=\frac{1}{2}=\overline{\int_0^1} f(x)dx$

Ini berarti fungsi *f(x)= x,* $0\le x\le 1$ terintegral *Riemann* pada [0,1] dan

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$$

Dari beberapa uraian di atas Integral *Riemann* juga dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6.2.3.1 *Diberikan Interval tertutup [a,b], fungsi bernilai real* $f:[a,b]\to R$ *dikatakan terintegral Riemann jika terdapat bilangan Real A sehingga untuk setiap bilangan real* $\varepsilon>0$ *terdapat bilangan* $\delta>0$ *dengan sifat* $P=\{a=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n=b;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ *partisi pada [a,b] dengan* $\|P\|<\delta$ *berlaku*

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon \tag{9}$$

Atau

$$|S(P;f)-A|<\varepsilon$$

Bilangan real A pada definisi diatas disebut nilai Integral Riemann fungsi *f* pada interval [a,b] dan ditulis

$$A=(R)\int_a^b f(x)dx \tag{10}$$

Selanjutnya untuk memudahkan penulisan, koleksi semua fungsi yang terintegral *Riemann* pada [a,b] dinotasikan dengan $R[a,b]$. Jadi jika $f:[a,b]\to R$ dikatakan terintegral *Riemann* cukup ditulis dengan $f\in R[a,b]$

Definisi Integral *Riemann* di atas juga dapat pula dinyatakan sebagai limit dengan persamaan berikut:

$$\lim_{\|p\|\to 0} S(P;f)=A \tag{11}$$

Contoh2.6.2.3.2:

Misal $f:[0,1]\to R$ adalah sebuah fungsi yang mengambil nilai 1 pada setiap titik. Maka jumlah *Riemann* pada interval [0,1] akan mempunyai nilai 1. Dan Integral *Riemannya* akan bernilai satu.

2.6.2.4. Integral Sebagai Limit

Definisi 2.6.2.4.1. *Diberikan fungsi f real dan terbatas pada selang [a,b]. Untuk setiap partisi* $P=\{x_{0,}x_1,...,x_n\}$ *pada [a,b] dibentuk jumlah*

$$S(P,f)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

Dimana t_i titik sembarang pada subselang tertutup $[x_{i-1},x_i], i=1,2,..n$. Bilangan real A disebut limit *S(P,f)* untuk norma $|P|\to 0$ dan ditulis $\lim_{|P|\to 0} S(P,f)=A$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon>0$ yang diberikan dan sembarang pengambilan titik $t_i\in[x_{i-1},x_i]$, terdapat $\delta>0$ sedemikian untuk semua partisi *P* pada [a,b] dengan $|P|<\delta$ berlaku

$$\left|S(P,f)-A\right|<\varepsilon$$

(Rahman. 2008;213)

Contoh 2.6.2.4.1.1

Jika $\int_a^b f$ dimana $f(x)=x$ pada interval [a,b] maka hitung nilai integralnya dan apakah terdapat limit dalam integral tersebut.

Penyelesaian:

$f \in C[a,b]$ dan f terintegral Riemann pada [a,b]. misal P adalah partisi pada [a,b]. pilih tag point $\xi_i = \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})$ untuk *i = 1, 2, ...,n*. kemudian

$$S(P;f;\xi)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(x_n^2 - x_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa setiap partisi tersebut di dapat $S(P;f;\xi) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$. Ini menunjukkan bahwa $\lim_{\|p\|\to 0} S(P;f;\xi) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$.

(Parzynski & Zipse;1982:164)

Teorema 2.6.2.4.2 *Misalkan f terbatas pada I. Misalkan terdapat suatu bilangan* $A \in \Re$ *sedemikian hingga untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat partisi* P_ε *dari I sedemikian hingga untuk sembarang partisi* $P \supseteq P_\varepsilon$ *dan sembarang jumlah Riemann S(P;f) berlaku*

$$\left|S(P;f)-A\right|<\varepsilon$$

Maka f terintegralkan pada I dan

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

Bukti:

Dengan menggunakan teorema sebelumnya yakni $\left|S(P;f)-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Sedang sebelumnya telah didefinisikan bahwa Integral *Riemann* dapat pula dinyatakan sebagai limit dengan $\lim_{\|p\|\to 0} S(P;f)=A$ maka

$$\left|A-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon \text{ sehingga } \int_a^b f(x)dx = A.$$

Jadi teorema terbukti.

2.6.2.5. Keterintegralan Fungsi Kontinu dan Fungsi Monoton

Teorema 2.6.2.5.1. *jika f kontinu pada [a,b], maka f terintegralkan pada [a,b].*

Bukti:

Fungsi yang kontinu pada [a,b] mestilah kontinu seragam pada [a,b]. Karena itu diberikan $\varepsilon>0$ sembarang terdapat $\delta>0$ sedemikian hingga untuk $x,y\in[a,b]$ dengan $|x-y|<\delta$ berlaku

$$\left|f(x)-f(y)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Selanjutnya untuk tiap $n \in N$ dengan $n > \frac{b-a}{\delta}$, tinjau partisi $P := \{x_0, x_1, .., x_n\}$ dengan $x_k = a + k.\frac{b-a}{\delta}, k = 0,1,..,n$ (disini interval [a,b] terbagi menjadi n, sub interval sama panjang).

Setiap sub interval $[x_{k-1}, x_k]$, f mencapai nilai maksimum M_k dan minimum m_k, maka

$$f(u_k) = M_k \text{ dan } f(v_k) = m_k$$

Dalam hal ini diperoleh

$$M_k - m_k = f(u_k) - f(v_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Dan akibatnya

$$0 \le U(P_n, f) - L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}.\frac{b-a}{n} = \varepsilon$$

Kemudian disimpulkan bahwa $\lim_{n \to \infty} [U(P_n, f) - L(P_n, f)] = 0$. Dan karenanya f terintegralkan pada [a,b].

(Gunawan; 2000: 113-114)

Contoh 2.6.2.5.1.1

Buktikan bahwa $\int_0^1 f(x)dx$ ada, dimana

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$\frac{\sin x}{x}$ adalah kontinu untuk $x \neq 0$ dan $\lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = 1 = f(0)$. Sehingga f adalah kontinu pada [0,1] dan f terintegral Riemann pada [0,1]. Sehingga $\int_0^1 f(x)dx$ ada.

Teorema 2.6.2.5.2: *Jika f monoton pada [a,b] maka f terintegralkan pada [a,b].*

Bukti:

Asumsikan f naik pada [a,b] untuk tiap $n \in N$ tinjau partisi $P := \{x_0, x_1,.., x_n\}$ dengan $x_k = a + k.\frac{b-a}{\delta}, k = 0,1,.., n$. Karena f naik pada $[x_{k-1}, x_k]$, maka $m_k = f(x_{k-1})$ dan $M_k = f(x_k)$. Dalam hal ini kita peroleh suatu deret teleskopis

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(x_k) - f(x_{k-1})\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right]$$

Sekarang jika $\varepsilon > 0$ diberikan, maka untuk tiap $n \in N$ dengan

$n > \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right]$ berlaku

$$0 \leq U(P_n, f) - L(P_n, f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$$

Dengan demikian *f* mestilah terintegralkan pada [a,b].

Teorema berikut memberikan suatu kriteria untuk keterintegralan *f* pada [a,b]. Untuk selanjutnya terintegralkan berati terintegral Riemann dan integral berarti integral Riemann.

Teorema 2.6.2.6: *f terintegral pada [a,b] jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu partisi* P_ε *dari [a,b] sedemikian hingga*

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon \tag{12}$$

Bukti:

Misalkan f terintegralkan pada [a,b]. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Dari definisi supremum terdapat suatu partisi P_1 dari [a,b] sehingga

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f)$$

Dari definisi infimum terdapat pula suatu partisi P_2 dari [a,b] sehingga

$$U(P_2, f) < U(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Sekarang misalkan $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, maka P_ε merupakan perhalusan P_1 dan P_2. Akibatnya

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f) \leq L(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Namun $L(f) = U(f)$ sehingga kita peroleh

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Sebaliknya misalkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu partisi P_ε dari [a,b] sedemikian hingga

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Maka, untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

$$0 \leq U(f) - L(f) \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Dari sini disimpulkan bahwa $U(f) = L(f)$ atau *f* terintegralkan pada [a,b].

(Gunawan; 2000: 111-112)

2.6.2.7. Sifat-Sifat Dasar Integral Riemann

Bagian ini membahas sifat-sifat dasar Integral *Riemann,* diantaranya ketunggalan nilai integral, kelinearan semua fungsi terintegral *Riemann*.

Teorema 2.6.2.7.1 *Jika* $f \in R[a,b]$ *maka nilai Integralnya tunggal*

Bukti:

Diketahui $f \in R[a,b]$

Adib : $A_1 = A_2$

Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Misalkan A_1 dan A_2 keduanya nilai integral *Riemann* fungsi *f*.

A_1 nilai integral fungsi *f* pada [a,b], maka terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ pada [a,b] dengan sifat $\|P_1\| < \delta_1$ berlaku

$$|S(P_1; f) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i)$$

A_2 nilai integral fungsi *f* pada [a,b], maka terdapat bilangan $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ pada [a,b] dengan sifat $\|P_2\| < \delta_2$ berlaku

$$|S(P_2; f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (ii)$$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akibatnya jika P sembarang partisi pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku $\|P\| < \delta_1$ dan $\|P\| < \delta_2$. Akibatnya

$$\left|S(P\ ;f) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dan

$$\left|S(P\ ;f) - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Lebih lanjut

$$\begin{aligned} \left|A_1 - A_2\right| &= \left|A_1 - S(P;f) + S(P;f) - A_2\right| \\ &\leq \left|A - S(P;f)\right| + \left|S(P;f) - A_2\right| \\ &\leq \left|S(P;f) - A_1\right| + \left|S(P;f) - A_2\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena ε sembarang bilangan positif maka dapat disimpulkan $A_1 = A_2$

(Herawan-Thobirin; 2008).

Teorema berikut ini menyatakan bahwa koleksi semua fungsi yang terintegral Riemann, yaitu $R[a,b]$ adalah ruang linier.

Teorema 2.6.2.7.2. *Jika* $f, g \in R[a,b]$ *dan a sembarang bilangan real, maka*

a. $(f+g) \in R[a,b]$ dan $(R)\int_a^b (f+g)(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx + (R)\int_a^b g(x)dx$ (13)

b. $\alpha f \in R[a,b]$ dan $(R)\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha (R)\int_a^b f(x)dx$ (14)

Bukti:

a. diketahui $f, g \in R[a,b]$. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$.

Karena $f \in R[a,b]$ maka terdapat $A_1 = (R)\int_a^b f(x)dx$ dan $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_1 pada [a,b] dengan sifat $\|P_1\| < \delta_1$ berlaku

$$\left|S(P_1; f) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $g \in R[a,b]$ maka terdapat $A_2 = (R)\int_a^b f(x)dx$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_2 pada [a,b] dengan sifat $\|P_2\| < \delta_2$ berlaku

$$\left|S(P_2; f) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ akibatnya jika P sembarang partisi pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku $\|P_1\| < \delta_1$ dan $\|P_2\| < \delta_2$. Akibatnya

$$\left|S(P; f+g) - (A_1 + A_2)\right| = \left|(P)\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$= \left|(P)\sum_{i=1}^{n}\{f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\} - (A_1 - A_2)\right|$$

$$= \left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + (P)\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$\leq \left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right| + \left|(P)\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Terbukti $\left(f+g\right)\in R[a,b]$ dan

$$(R)\int_a^b (f+g)(x)dx = A_1 + A_2 = (R)\int_a^b f(x)dx + (R)\int_a^b g(x)dx$$

b. Diketahui $f \in R[a,b]$. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan α merupakan konstanta.

Karena $f \in R[a,b]$ maka terdapat $A = (R)\int_a^b f(x)dx$ dan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$\left|S(P;f) - A\right| < \varepsilon$$

Jika P sembarang partisi pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$\left|S(P;\alpha f) - A\right| = \left|(P)\sum_{i=1}^{n}(\alpha f)(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

$$= \left|(P)\alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

Karena α merupakan konstanta maka dapat kita keluarkan sehingga.

$$= \alpha\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon$$

$$= \alpha\left|S(P;f) - A\right| < \varepsilon$$

$$= \alpha(R)\int_a^b f(x)dx$$

Terbukti $\left(\alpha f\right)\in R[a,b]$ dan $(R)\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha(R)\int_a^b f(x)dx$

(Herawan-Thobirin; 2008)

Teorema berikut menyatakan hubungan keterintegralan suatu fungsi dengan keterbatasan

Teorema 2.6.2.7.3. *Jika* $f \in R[a,b]$ *maka f terbatas pada [a,b].*

Bukti:

Sifat keterbatasan: jika $m \leq f(x) \leq M$ pada [a,b] maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Berdasarkan jumlahan Riemann yaitu

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

sehingga

$L(P;f) \leq S(P;f) \leq U(P;f)$ dan karena *S(P;f) = A* dan *A* sendiri adalah $\int_a^b f(x)$ sesuai dengan teorema sebelumnya dan berdasar teorema dasar kalkulus yaitu $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ maka untuk sifat keterbatasan berlaku

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dengan persamaan tersebut dikatakan bahwa *f* terbatas pada [a,b].

Teorema 2.6.2.7.4. *Jika* $f \in R[a,b]$ *dan* $f \in R[c,b]$ *dengan a < b < c maka* $f \in R[a,b]$. *Lebih lanjut*

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^c f(x)dx + (R)\int_c^b f(x)dx \qquad (15)$$

Bukti:

$f \in R[a,b]$ dan $f \in R[c,b]$, misalkan $(R)\int_a^c f(x)dx = A_1$ dan $(R)\int_c^b f(x)dx = A_2$. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$, maka terdapat dan $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_1 pada [a,c] dengan sifat $\|P_1\| < \delta_1$ berlaku

$$\left|(P_1)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Dan juga terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga untuk setiap partisi P_2 pada [c,b] dengan sifat $\|P_2\| < \delta_2$ berlaku

$$\left|(P_2)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ akibatnya jika P sembarang partisi pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ maka terdapat dua kemungkinan:

(i) c merupakan salah satu titik partisi P

(ii) c bukan merupakan salah satu titik partisi P

kemungkinan (i)

jika c merupakan salah satu titik partisi P, maka P terbagi atas P_1 pada interval bagian [a,c] dan P_2 pada interval bagian [c,b]. Karena $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ dan $\|P\| < \delta$, maka berlaku pula $\|P_1\| < \delta_1$ dan $\|P_2\| < \delta_2$ sehingga

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$= \left|(P_1)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + (P_2)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$= \left|(P_1)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1 + (P_2)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$\leq \left|(P_1)\sum_{i=1}^{n} f(x_i - x_{i-1}) - A_1\right| + \left|(P_2)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

Kemungkinan (ii)

Jika c bukan merupakan satu titik partisi Riemann P, maka dapat dibuat partisi Riemann P_ε pada [a,b] dengan c sebagai salah satu titik partisinya, sehingga P_ε menjadi penghalus partisi P. Selanjutnya dengan cara seperti pada kemungkinan (i) diperoleh;

$$\left|(P_\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$= \left|(P_{\varepsilon 1})\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + (P_{\varepsilon 2})\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$= \left|(P_{\varepsilon 1})\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_1 + (P_{\varepsilon 2})\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$\leq \left|(P_{\varepsilon 1})\sum_{i=1}^{n} f(x_i - x_{i-1}) - A_1\right| + \left|(P_{\varepsilon 2})\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A_2\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Jadi

$$\left|(P_\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (P_\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Maka

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$\left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (P_\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + (P_\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2)\right|$$

$$\leq \left|(P)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (P_\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(x_i - x_{i-1})\right| + \left|(P_\varepsilon)\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - (A_1 + A_2\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dengan demikian terbukti Jika $f \in R[a,b]$ dan

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^c f(x)dx + (R)\int_a^b f(x)dx$$

(Herawan-Thobirin; 2008)

2.7. Integral Darboux

Pada tahun 1875, matematikawan I.G. Darboux secara konstruktif memodifikasi definisi Integral *Riemann* dengan terlebih dahulu mendefinisikan jumlah *Darboux* atas dan jumlah *Darboux* bawah, selanjutnya mendefinisikan Integral *Darboux* atas dan Integral *Darboux* bawah.

Terdapat cara lain melihat integral sebagai limit dari jumlah *Riemann*. Misalkan *I*:= [a,b] dan $P := \{x_0, x_1, .., x_n\}$ adalah partisi dari *I*. Ukuran kehalusan dari *P*, dilambangkan dengan $\|P\|$ didefinisikan sebagai

$$\|P\| := \sup\{x_i - x_{i-1} : i = 1,2,..,n\}.$$

Dengan perkataan lain $\|P\|$ adalah panjang sub-interval maksimum yang terkait dengan partisi *P*.

Selain itu juga jika $P \subseteq Q$ (yakni *Q* merupakan perhalusan dari *P*), maka $\|Q\| \leq \|P\|$. Namun, sebaliknya $\|Q\| \leq \|P\|$ tidak mengharuskan $Q \subseteq P$.

Teorema 2.7.1. (Teorema *Darboux*). *Misalkan f terintegral pada I. Maka untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian hingga jika Q adalah partisi dari I dengan* $\|Q\| < \delta$ *maka untuk sembarang jumlah Riemann S(Q;f) berlaku*

$$\left| S(Q; f) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon \tag{16}$$

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, terdapat partisi $P_\varepsilon := \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ sedemikian hingga

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Akibatnya, jika $P \supseteq P_\varepsilon$ maka $U(P, f) - L(P, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Selanjutnya misalkan $M := \{|f(x)| : x \in I\}$ dan $\delta := \frac{\varepsilon}{12Mn}$.

Ambil sembarang partisi $Q := \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ dari I dengan $\|Q\| < \delta$ dan misalkan $Q^* := Q \cup P_\varepsilon$ maka $Q^* \supseteq P_\varepsilon$ dan Q^* mempunyai sebanyak-banyaknya n-1 titik lebih banyak daripada *Q*, yakni titik-titik $x_1, ..., x_{n-1}$ yang ada di P_ε tetapi tidak di *Q*. Selanjutnya kita akan membandingkan $U(Q, f)$ dengan $U(Q^*, f)$ serta $L(Q, f)$ dengan $L(Q^*, f)$.

Karena $Q^* \supseteq Q$, kita mempunyai $U(Q, f) - U(Q^*, f) \geq 0$. Jika kita tuliskan $Q^* = \{z_0, z_1, .., z_p\}$ maka $U(Q, f) - U(Q^*, f)$ dapat dinyatakan sebagai jumlah dari sebanyak-banyaknya 2(n-1) suku berbentuk

$$(M_j - M_k^*)(z_k - z_{k-1})$$

Dengan M_j menyatakan supremum dari *f* pada interval ke-*j* dalam *Q* dan M_k^* menyatakan supremum dari *f* pada sub-interval ke-*k* dalam Q^*. Karena $|M_j - M_k^*| \leq 2M$ dan $|z_k - z_{k-1}| \leq \|Q^*\| \leq \|Q < \delta\|$, kita peroleh

$$0 \leq U(Q, f) - U(Q^*, f) \leq 2(n-1).2M.\delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

Akibatnya didapatkan

$$U(Q, f) < U(Q^*, f) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Serupa dengan itu terdapat

$$L(Q^*, f) - \frac{\varepsilon}{3} < L(Q, f)$$

Selanjutnya bahwa *S(Q,f)* dan $\int_a^b f(x)dx$ terletak dalam interval $[L(Q,f),U(Q,f)]$, dan karena itu keduanya berada dalam interval

$$I_\varepsilon := \left[L(Q^*,f) - \frac{\varepsilon}{3}, U(Q^*,f) + \frac{\varepsilon}{3} \right]$$

Karena $Q^* \supseteq P_\varepsilon$ kita mempunyai $U(Q,f) - L(Q^*,f) < \frac{\varepsilon}{3}$, sehingga panjang I_ε lebih kecil daripada ε. Jadi jarak antara *S(Q,f)* dan $\int_a^b f(x)dx$ mestilah lebih kecil daripada ε. Jadi teoremanya terbukti.

(Gunawan,119:2002)

2.7.2. Jumlah Darboux Atas dan Jumlah Darboux Bawah

Diberikan interval tertutup $[a,b] \subseteq R$ dan $f:[a,b] \to R$ fungsi bernilai real yang terbatas pada [a,b]. Jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ sembarang partisi pada [a,b] maka didefinisikan

$$M = \sup\{f(\xi_i) : \xi_i \in [a,b]\} \text{ dan } m = \inf\{f(\xi_i) : \xi_i \in [a,b]\}$$

Keterbatasan fungsi *f* dapat menjamin eksistensi dua bilangan *M* dan *m* tersebut. Selanjutnya untuk *i = 1,2,....n* didefinisikan

$$M_i = \sup\{f(\xi_i) : \xi_i \in [x_i - x_{i-1}]\}$$

$$m_i = \inf\{f(\xi_i) : \xi_i \in [x_i - x_{i-1}]\}$$

Dapat dipahami bahwa $m \le m_i \le f(\xi_i) \le M_i \le M$ untuk setiap *i = 1,2,....n.*

Dari uraian di atas maka untuk jumlah *Darboux* atas fungsi *f* terkait dengan partisi *P*, dinyatakan dengan *U(P;f),* dan didefinisikan sebagai berikut

$$U(P;f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \tag{17}$$

Sedangkan jumlah *Darboux* bawah dengan partisi yang sama dengan jumlah *Darboux* atas didefinisikan sebagai berikut

$$L(P;f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \tag{18}$$

Lemma 2.7.2.1. *Diberikan* $[a,b] \subseteq R$ *dan* $f:[a,b] \to R$ *terbatas pada [a,b] dan* $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ *sembarang partisi pada [a,b] , maka berlaku*

$$L(P;f) \le U(P;f)$$

(Herawan-Thobirin; 2008)

Bukti:

Diberikan dan $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ sembarang partisi pada [a,b] , berdasarkan definisi supremum dan infimum suatu himpunan maka diperoleh $m_i \le M_i$ untuk setiap *i = 1,2,....n*. oleh karenanya diperoleh

$$L(P;f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = U(P;f)$$

Dengan menggunakan definisi yang sama untuk penghalus partisi pada integral *Riemann,* maka muncul lemma sebagai berikut

Teorema 2.7.2.2. *Diberikan* $[a,b] \subseteq R$ *dan* $f:[a,b] \to R$ *fungsi yang terbatas pada [a,b]. Jika* P_1 *dan* P_2 *sembarang dua partisi pada [a,b] , maka berlaku*

$$L(P_1;f) \leq U(P_2;f) \tag{19}$$

Bukti:

Diket: $[a,b] \subseteq R$ dan $f:[a,b] \to R$ fungsi yang terbatas pada [a,b]. Jika P_1 dan P_2 sembarang dua partisi pada [a,b]

Adib: $L(P_1;f) \leq U(P_2;f)$

Dibentuk $P = P_1 \cup P_2$, maka $P_1 \subseteq P dan P_2 \subseteq P$, sehingga diperoleh $L(P_1;f) \leq L(P;f)$ dan $U(P_1;f) \leq U(P;f)$. Berdasarkan teorema **2.7.2.1** diperoleh $L(P;f) \leq U(P;f)$. Akibatnya diperoleh $L(P_1;f) \leq U(P_2;f)$.

2.7.3. Integral Darboux Atas dan Integral Darboux Bawah

P [a,b] dimaksudkan sebagai himpunan semua partisi pada [a,b]. Selanjutnya integral *Darboux* atas fungsi *f* pada interval [a,b], dinotasikan dengan *U(f)* atau $D\int_a^b f(x)dx$ didefinisikan sebagai

$$U(f) = D\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \inf\{U(P;f); P \in \mathrm{P}[a,b]\} \tag{20}$$

Sedangkan integral *Darboux* bawah fungsi *f* pada interval [a,b], dinotasikan dengan *U(f)* atau $D\underline{\int_a^b} f(x)dx$ didefinisikan sebagai

$$U(f) = D\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{U(P;f); P \in \mathrm{P}[a,b]\} \tag{21}$$

Mengenai Integral tersebut diatas terdapat beberapa teorema yakni

Teorema 2.7.3.1. *Diberikan* $[a,b] \subseteq R$ *dan* $f:[a,b] \to R$ *fungsi yang terbatas pada [a,b]. Jika fungsi f terintegral Darboux atas dan terintegral Darboux bawah pada interval [a,b], maka*

$$L(f) \leq U(f) \tag{22}$$

Bukti:

Diket: fungsi *f* terintegral *Darboux* atas dan terintegral *Darboux* bawah, artinya dapat dipilih sembarang $P_1 \in \mathrm{P}[a,b]$ dan $P_2 \in \mathrm{P}[a,b]$. Dipilih $P = P_1 \cup P_2$, maka berdasarkan lemma 2.7.2.1 dan teorema 2.7.2.2 berlaku

$$L(P_1;f) \leq L(P;f) \leq U(P;f) \leq U(P_2;f)$$

Jadi bilangan real $U(P_2;f)$ merupakan suatu batas atas dari $\{L(P;f) : P \in \mathrm{P}[a,b]\}$. Akibatnya $L(f) = \sup\{L(P;f) : P \in \mathrm{P}[a,b]\} \leq U(P_2;f)$.

Demikian pula *L(f)* merupakan batas bawah dari $\{U(P;f) : P \in \mathrm{P}[a,b]\}$ sehingga $L(f) = \inf\{U(P_2;f) : P \in \mathrm{P}[a,b]\} = U(f)$.

Jadi terbukti $L(f) \leq U(f)$

Dari beberapa uraian di atas selanjutnya diberikan definisi Integral Darboux sebagai berikut

Definisi 2.7.3.2.(Definisi Integral Darboux) *Fungsi bernilai real dan terbatas* $f:[a,b] \to R$ *dikatakan terintegral Darboux pada [a,b] jika*

$$L(f)=U(f) \quad \text{atau} \quad D\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = D\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = D\int_a^b f(x)dx \tag{23}$$

Atau bisa didefinisikan

$$\omega(f;P) = U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon .$$

Integral *Darboux* menggunakan partisi *Riemann* yang lebih kecil yakni $P_\varepsilon \subseteq P$

Contoh 2.7.3.2.1:

Diberikan $f(x) = x, \quad \forall x \in [0,1]$. Apakah *f* terintegral *Darboux* pada [0,1].

Penyelesaian:

Ambil sembarang partisi seragam $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ pada [0,1]. Karena

$f(x) = x, \quad \forall x \in [0,1]$ maka $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1,2,..,n$

$$M_i = \frac{i}{n}, \quad \forall i = 1,2,..,n$$

$$\begin{aligned} U(P_n;f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + n) \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$m_i = \frac{i-1}{n} \quad \forall i = 1,2,..,n$$

$$L(P_n;f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1)$$

$$= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + ... + n - 1)$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Diperoleh

$$\lim_{n \to \infty} U(P_n; f) - L(P_n; f) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = 0$$

Maka *f* terintegral Darboux pada [0,1] dengan nilai Integral

$$D \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to \infty} U(P_n; f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

2.7.3.3. Fungsi Kontinu dan Monoton Pada Integral Darboux

Teorema 2.7.3.3.1

Setiap fungsi real dan kontinu pada interval [a,b], terintegral *Darboux* pada [a,b].

Bukti:

Diberikan sembarang *f* fungsi real dan kontinu pada interval [a,b], berdasarkan teorema kekontinuan seragam, maka *f* kontinu seragam. Selanjutnya diberikan sembarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena *f* kontinu seragam, maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ sembarang partisi pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{(b-a)2^i}$$

Sehingga diperoleh

$$U(P;f) - L(P;f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{(b-a)2^i}(b-a)$$

$$= \varepsilon$$

Berdasarkan kriteria Riemann *f* terintegral Darboux pada [a,b] .

Contoh *2.7.3.3.1.1* :

Diketahui $f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

Penyelesaian:

Fungsi ini merupakan fungsi kontinu. Ia kontinu pada titik 2.

$\lim_{x \to 2} f(x) = x^2 = 4$.

Karena menurut definisi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \to 2} f(2) = f(2)$$

Selanjutnya untuk mencari apakah ia terintegral Riemann maka harus dicari *U(P;f) dan L(P;f)*

Di sini, $m_1 = \inf_{x\in[0,\frac{1}{3}]} f(x) = 0$, $m_2 = \inf_{x\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]} f(x) = \frac{1}{9}$, $m_3 = \inf_{x\in[\frac{1}{2},1]} f(x) = \frac{1}{4}$,

$m_4 = \inf_{x\in[1,\frac{5}{4}]} f(x) = 1$, $m_5 = \inf_{x\in[\frac{5}{4},2]} f(x) = \frac{25}{16}$

$M_1 = \sup_{x\in[0,\frac{1}{3}]} f(x) = \frac{1}{9}$, $M_2 = \sup_{x\in[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]} f(x) = \frac{1}{4}$, $M_3 = \sup_{x\in[\frac{1}{2},1]} f(x) = 1$,

$M_4 = \sup_{x\in[1,\frac{5}{4}]} f(x) = \frac{25}{16}$, $M_5 = \sup_{x\in[\frac{5}{4},2]} f(x) = 4$

Jadi

$$L(P;f) = 0\left(\frac{1}{3}-0\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{5}{4}-1\right)+\frac{25}{16}\left(2-\frac{5}{4}\right) = 0{,}4$$

$$U(P;f) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}-0\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+1\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{25}{16}\left(\frac{5}{4}-1\right)+4\left(2-\frac{5}{4}\right) = 0{,}3$$

Syarat terintegral Riemann yaitu

$L(P;f) - U(P;f) < \varepsilon$ sehingga $0{,}3 - 0{,}4 < \varepsilon$

Teorema 2.7.3.3.2.

Setiap fungsi monoton adalah *Integral Darboux*

Bukti:

Misal $f:[a,b] \to R$ adalah fungsi naik. Kemudian terdapat partisi P_n pada interval [a,b] hingga untuk setiap $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \Delta x$. Jika f adalah fungsi naik, dia akan supremum pada subinterval kanan dan akan infimum pada subinterval kiri. Sedemikian hingga

$$\omega(f;P_n)=U(f;P_n)-L(f;P_n)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x-\sum_{i=0}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)-f(x_{i-1})$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(x_n)-f(x_0)\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

Teorema 2.7.3.4 (Kriteria Riemann untuk Integral Darboux)

Fungsi bernilai real dan terbatas $f:[a,b]\to R$ *terintegral Darboux pada [a,b] jika dan hanya jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon>0$*, terdapat partisi Riemann* P_ε *pada [a,b] sehingga untuk setiap partisi Riemann P pada interval [a,b] dengan sifat* $P_\varepsilon \subseteq P$*, berlaku*

$$U(P;f)-L(P;f)<\varepsilon \tag{24}$$

Bukti:

Syarat perlu;

Diketahui fungsi $f:[a,b]\to R$ terintegral *Darboux* pada [a,b], berarti *L(f)=U(f)*. Diberikan sembarang bilangan $\varepsilon>0$, berdasarkan definisi *U(f)* maka terdapat partisi *Riemann* P_1 pada [a,b] sehingga

$$U(f)\le U(P_1;f)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Karena *L(f)=U(f)*. Maka berlaku $L(f) \leq U(P_1;f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

Selanjutnya untuk bilangan $\varepsilon > 0$ tersebut berdasarkan definisi *L(f)* maka terdapat partisi *Riemann* P_2 pada [a,b] sehingga

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2;f) \leq L(f)$$

Berdasarkan teorema 2.7.2.2 berlaku $L(P_2;f) \leq U(P_1;f)$. Oleh karena itu diperoleh

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2;f) \leq U(P_1;f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ maka $P_1 \subseteq P_\varepsilon$ dan $P_2 \subseteq P_\varepsilon$ sehingga diperoleh

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2;f) \leq L(P_\varepsilon;f) \leq U(P_\varepsilon;f) \leq U(P_1;f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Akibatnya $L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_\varepsilon;f) \leq U(P_\varepsilon;f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Selanjutnya jika diambil sembarang partisi riemann P pada interval [a,b] dengan sifat $P_\varepsilon \subseteq P$ berlaku

$$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_\varepsilon;f) \leq L(P;f) \leq U(P;f) \leq U(P_\varepsilon;f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Maka didapat $L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(P;f) \leq U(P;f) < L(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

Akhirnya diperoleh $U(P;f) - L(P;f) < \varepsilon$

Syarat cukup;

Diketahui untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat partisi *Riemann* P_ε pada [a,b] sehingga untuk setiap partisi *Riemann* P pada interval [a,b] dengan sifat $P_\varepsilon \subseteq P$ berlaku $U(P;f) - L(P;f) < \varepsilon$.

Ini ekuivalen dengan $U(P;f) < L(P;f) + \varepsilon$. Berdasarkan definisi *L(f)* dan *U(f),* maka untuk setiap partisi *Riemann P* pada [a,b] berlaku $U(f) \leq U(P;f)$ dan $L(P;f) \leq L(f)$

Sehingga diperoleh $U(f) \leq U(P;f) < L(P;f) + \varepsilon \leq L(f) + \varepsilon$

Diperoleh $U(f) < L(f) + \varepsilon$

Karena bilangan $\varepsilon > 0$ diambil sembarang maka didapatkan

$$U(f) \leq L(f)$$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan tentang bukti ekuivalensi Integral *Riemann* dan *Integral Darboux*. Kemudian dipaparkan juga bukti sifat-sifat *Integral Darbux* dengan menerapkan sifat-sifat *Integral Riemann* .

3.1. Ekuivalensi *Integral Riemann* dan *Integral Darboux*

Selain *Integral Riemann* terdapat *Integral Darboux***.** *Integral Darboux* adalah ekuivalen dengan *Integral Riemann*. Suatu fungsi *terintegral Darboux* jika dan hanya jika ia juga *terintegral Riemann* dan jika nilai kedua Integral itu ada maka nilai keduanya sama.

Teorema 3.1.1

Diberikan fungsi $f:[a,b]\to R$ *adalah integral Riemann jika dan hanya jika f terintegral Darboux pada [a,b] sehingga* $R\int_a^b f = D\int_a^b f$

(Pete;2008:8).

Bukti:

- Bukti yang pertama adalah $R\int_a^b f \Rightarrow D\int_a^b f$

Diketahui fungsi $f:[a,b]\to R$ *terintegral Riemann* pada [a,b], berarti terdapat bilangan $A = R\int_a^b f(x)dx$ artinya untuk sembarang bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ sembarang partisi pada [a,b] dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$\left| (P)\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil sembarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,..,n$ berdasarkan definisi m_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ demikian sehingga

$$m_i \leq f(\xi_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Sehingga

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \left(m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)(x_i - x_{i-1})$$

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \left(m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i - x_{i-1}) \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$L(P;f) \leq S(P;f) < L(P;f) + \frac{\varepsilon}{2} \text{................} \qquad (1)$$

Demikian pula untuk sembarang $[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,..,n$ berdasarkan M_i maka terdapat $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian hingga

$$M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(\xi_i) \leq M_i$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$U(P;f)-\frac{\varepsilon}{2}<S(P;f)\leq U(P;f) \text{........} \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$U(P;f)-\frac{\varepsilon}{2}<L(P;f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P;f)-L(P;f)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Menurut definisi Integral *Darboux* yaitu $U(P;f)-L(P;f)<\varepsilon$. Jadi terbukti bahwa $R\int_a^b f \Rightarrow D\int_a^b f$

- Bukti yang kedua adalah $D\int_a^b f \Rightarrow R\int_a^b f$

Definisi Integral *Darboux*

$$L(f)=U(f) \text{ atau}$$

$$\omega(f;P)=U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon$$

Berdasarkan definisi jumlah *Darboux* atas dan *Darboux* bawah

$$=U(f;P)-L(f;P)<\varepsilon$$
$$=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$$

Kita misalkan sebagai berikut

$$M_i=f(x_i) \text{ dan } \qquad m_i=f(x_{i-1})$$

Sehingga

$$= U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\}(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\}\frac{b-a}{n}$$

Karena

$x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} = \Delta x$ maka

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\}$$

$$= \frac{b-a}{n} \{f(b) - f(a)\} < \varepsilon$$

Dan berdasarkan sifat Archimedes untuk bilangan asli n maka $\dfrac{b-a}{n} < \delta$.

Menurut teorema 2.6.2.1.2 bahwa untuk setiap bilangan $\delta > 0$ terdapat partisi *P* pada [a,b] sehingga $\|P\| < \delta$. Sedangkan jika $\|P\| < \delta$ berlaku

$$\left| (P)\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right| < \varepsilon$$

Hasil diatas merupakan definisi dari Integral Riemann. Jadi $D\int_a^b f \Rightarrow R\int_a^b f$ terbukti.

Contoh 3.2.1.1:

Fungsi konstan terintegral Riemann pada interval tertutup

Penyelesaian:

$f(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$ dengan c suatu konstanta.

Ambil sembarang $P = \{a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ partisi pada [a,b], maka

$$M_i = c \quad \text{dan} \quad m_i = c \qquad \forall i = 1,2,..,n$$

Oleh karenanya

$$U(P;f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1})$$
$$= c\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$
$$= c(b-a)$$

Dan

$$L(P;f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1})$$
$$= c\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$
$$= c(b-a)$$

$U(f) = \inf\{U(P;f) : P \in \rho[a,b]\} = c(b-a)$ dan

$L(f) = \sup\{L(P;f) : P \in \rho[a,b]\} = c(b-a)$. *Jadi* $U(f) = L(f)$, maka f terintegral Darboux yang berarti ia juga terintegral Riemann. Lebih lanjut

$$(R)\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

Karena hasil antara Integral Darboux dan Integral Riemann sama maka dikatakan ekuivalensi.

Contoh 3.2.1.2

Fungsi $h(x) = x^2$ terintegral Riemann pada interval [0,1]. Misal P_n adalah subinterval pada interval [0,1] sehingga $P_n := \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right)$.

Ketika *h* naik pada interval [0,1] maka di dapat $m_k = \left((k-1)/n^2\right)$ dan $M_k = \left(k/n\right)^2$ untuk *k = 1,2,..,n*. Sehingga

$$L(P_n; h) = \left(0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2\right)/n^3$$

$$U(P_n; h) = \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)/n^3$$

Dengan menggunakan persamaan $1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$

$$L(P_n; h) = (n-1)n(2n-1)/6n^3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$U(P_n; h) = n(n+1)(2n+1)/6n^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

Untuk semua $n \in N$. Selanjutnya dapat dilihat

$$L(h) = \sup\{L(P_n; h); n \in N\} \leq \sup\{L(P_n; h); P \in \mathrm{P}(1)\} = \frac{1}{3}$$

$$U(h) = \inf\{U(P_n; h); P \in \mathrm{P}(1)\} \leq \inf\{U(P_n; h); n \in N\} = \frac{1}{3}$$

Jadi $L(h) = U(h) = \frac{1}{3}$. Maka *h* terintegral Darboux yang berarti ia juga terintegral Riemann.

(Bartle,1994:236)

3.2. Sifat-Sifat Integral Darboux

Telah dibuktikan bahwa Integral *Riemann* dan Integral *Darboux* adalah ekuivalen, maka sifat-sifat dasar Integral *Riemann* yaitu ketunggalan nilai integral, kelinearan dan keterbatasan fungsinya berlaku pula pada Integral *Darboux.*

3.2.1 Ketunggalan nilai integral

Telah dijelaskan pada bab sebelumnya yakni pada teorema 2.6.2.7.1 bahwa *Integral Riemann* mempunyai nilai yang tunggal yakni $A_1 = A_2$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pada *Integral Darboux* juga berlaku demikian.

Menurut definisi Integral *Darboux* yakni

$\omega(f;P) = U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$ maka

$U(f;P) = L(f;P)$

Jika $S(Q,f)$ pada teorema *Darboux* menyatakan jumlah *Darboux* yang terkait dengan partisi Q maka $\left| S(Q;f) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$

Sedangkan $\int_a^b f(x)dx = A$ maka $|S(Q;f) - A| < \varepsilon$

Untuk membuktikan bahwa *Integral Darboux* mempunyai nilai tunggal dimisalkan $A_1 \neq A_2$. Andaikan $|S(Q;f) - A_1| < \varepsilon$ dan $|S(Q;f) - A_2| < \varepsilon$ dengan $A_1 \neq A_2$, maka untuk setiap A_1 terdapat $\delta_1 > 0$ untuk setiap partisi $Q = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ dengan $\|Q\| < \delta$ sehingga untuk setiap $\|Q_1\| < \delta_1$ berlaku

$$|S(Q;f) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Hal demikian juga berlaku pada A_2 pada nilai Integral fungsi *f* pada [a,b] yaitu

$$|S(Q;f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dipilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, menggunakan ketaksamaan segitiga maka untuk $\|Q\| < \delta$

$$\begin{aligned}
|A_1 - A_2| &= |A_1 - S(Q;f) + S(Q;f) - A_2| \\
&\leq |A - S(Q;f)| + |S(Q;f) - A_2| \\
&\leq |S(Q;f) - A_1| + |S(Q;f) - A_2| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Sehingga permisalan salah karena dari hasil diatas di dapat bahwa $A_1 = A_2$. Jadi terbukti bahwa pada Integral *Darboux* juga berlaku sifat ketunggalan nilai Integral.

3.2.2. Kelinieran Fungsi

Pada Integral *Riemann* telah dibuktikan pada teorema 2.6.2.7.2 berlaku sifat kelinieran fungsi. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pada Integral *Darboux* juga berlaku demikian. Adapun sifat kelinieran Integral *Darboux* adalah sebagai berikut:

a. $D\int_a^b (f+g)(x) = D\int_a^b f(x) + D\int_a^b g(x)$

b. $D\int_a^b \alpha f(x) = \alpha(D)\int_a^b f(x)$

Bukti:

a. Menurut Definisi Integral *Darboux* yaitu

$$\omega(f;P) = U(f;P) - L(f;P)$$

$$\omega(f+g;P) = U(f+g;P) - L(f+g;P)$$

Pada sisi lain kita tidak bisa mengatakan bahwa

$$U(f+g,P) = U(f,P) + U(g,P)$$

karena

$$\sup_{x\in A} f(x) + g(x) \le \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$

Ini menunjukkan bahwa

$$U(f+g,P) \le U(f,P) + U(g,P)$$

Hal tersebut juga berlaku untuk

$$L(f+g,P) \ge L(f,P) + L(g,P)$$

Ambil sembarang partisi P_1 sehingga $\omega(f;P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan partisi P_2 maka

$$\omega(f;P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seperti kita ketahui bahwa

$$P = P_1 \cup P_2$$

sehingga

$\omega(f;P) \le \omega(f;P_1)$ dan $\omega(g;P) \le \omega(g;P_2)$ dan

$$\omega(f+g;P) = U(f+g;P) - L(f+g;P)$$

$$\le U(f;P) + U(g;P) - L(f;P) - L(g;P)$$
$$= \omega(f;P) + \omega(g;P) < \varepsilon$$

Jadi $D\int_a^b (f+g)(x) = D\int_a^b f(x) + D\int_a^b g(x)$

b. Menurut Definisi Integral Darboux yaitu

$$\omega(f;P) = U(f;P) - L(f;P)$$

$$\omega(\alpha f;P) = U(\alpha f;P) - L(\alpha f;P)$$

$$\le \alpha U(f;P) - \alpha L(f;P)$$
$$= \alpha(U(f;P) - L(f;P))$$

Karena α adalah konstanta maka α bisa dikeluarkan. Dan sesuai dengan definisi

$$D\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = D\int_{\underline{a}}^b f(x)dx = D\int_a^b f(x)dx$$

atau

$$\omega(f;P) = U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$$

dan

$L(f)=U=(f)$.

Sehingga

$$D\int_a^b \alpha f(x) = \alpha(D)\int_a^b f(x) .$$

3.2.3. Keterbatasan Fungsi Integral Darboux.

Karena Integral *Riemann* terbatas pada [a,b] sesuai dengan teorema 2.6.2.7.3 maka Integral *Darboux* juga sama, karena sudah dibuktikan bahwa keduanya terdapat ekuivalensi. Di sini akan dibuktikan bahwa Integral *Darboux* juga terbatas pada [a,b]:

Bukti:

Definisi Integral *Darboux* yaitu

$$\omega(f;P) = U(f;P) - L(f;P)$$

sedangkan sifat keterbatasan adalah $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Pada sisi lain teorema *Darboux* juga dapat dipakai untuk membuktikan rumusan tersebut.

$\left| S(Q;f) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$. Sedangkan menurut teorema 2.6.2.7.3 yakni

$$L(P;f) \le U(P;f) \text{ maka } m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) .$$

Dan fungsi *f* terbatas pada [a,b].

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab III, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1) Telah dibuktikan bahwa antara Integral Riemann dan Darboux terdapat ekuivalensi.
2) Sifat yang berlaku pada Integral Riemann terbukti juga berlaku pada Integral Darboux karena keduanya mempunyai ekuivalensi. Sifatnya yaitu, ketunggalan nilai integral, kelinieran dan keterbatasan fungsi.

4.2. Saran

Bagi pembaca yang ingin melanjutkan penelitian ini maka peneliti menyarankan tidak hanya menggunakan Integrak darboux saja serta pada interval [a,b]. Karena banyak Integral lain yang merupakan generalisasi dari Integral Riemann.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Hifnawi, M. Ibrahim. 2008. *Tafsir Alqurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Bartle, R.G and Sherbert, D.R, 1992, *Introduction to Real Analysis, second Edition,* John Wiley and Sons, Inc, USA.

Clark, Pete L.2008.*The Riemann-Darboux Integral II.*

Gunawan, Hendra.2008.Pengantar Analisis Real. Personal.FMIPA.ITB.ac.id. Diakses tanggal 9 Agustus 2009.

Hasan,Iqbal.2002.*Metodologi Penelitian dan Aplikasinya*.Jakarta:Ghalia Indonesia.

Hernadi, Julan. 2009.*Analisis Real.* .wordpress.com/2009/02/analisis_bab1.**pdf** - Diakses tanggal 9 Agustus 2009.

Hutahean,Effendi.1989.*Analisis Real II*.Jakarta: Karunika Jakarta Universitas Terbuka.

J. Purcel, Edwin. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: PT. Airlangga.

Rahman, M.Si, Hairur. 2008. *Pengantar Analisis Real*. Malang: UIN Malang Press.

Riyanto, Zaki.2008.*Pengantar Analisis Real.www.wahid.web.ugm.ac.id/download* Diakses tanggal 9 Agustus 2009.

Thobirin.2008.*Pengantar Analisis Real. /aris_thobirin/files/2008/12/bab-v.pdf* Di akses tanggal 1 Maret 2009.

.Analysis Real. 2008.*en.wikibooks.org/wiki/Real_Analysis/Darboux_Integral* Di akses tanggal 13 Desember 2008.

Integral Darboux.2008. Wolfram MathWorld.mht. Integral darboux. Di akses tanggal 13 Desember 2008.

http://www.lbh-apik.or.id/fact.2054.2009.kesetaraangenderdalamAl-qura'n.html. Diakses tanggal 13 Juli 2009.