APLIKASI *CAYLEY TREE*
DALAM MENENTUKAN BANYAK ISOMER SENYAWA ALKANA

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains

Disusun oleh:
Nely Indra Meifiani
04305144007

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2008

PERSETUJUAN

SKRIPSI

APLIKASI *CAYLEY TREE* DALAM MENENTUKAN BANYAK ISOMER SENYAWA ALKANA

Telah memenuhi syarat dan siap untuk diujikan

Disetujui pada

Hari/tanggal: Rabu, 16 Juli 2008

Menyetujui,

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Emut M.Si	Murdanu M.Pd
NIP. 131808333	NIP.132048518

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	: Nely Indra Meifiani
NIM	: 04305144007
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: MIPA
Judul Skripsi	: Aplikasi *Cayley Tree* Dalam Menentukan Banyak Isomer Senyawa Alkana

Menyatakan bahwa karya ilmiah ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang sepengetahuan saya tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim.

Yogyakarta, 11 Juni 2008
Yang menyatakan

Nely Indra Meifiani
NIM. 04305144007

PENGESAHAN

SKRIPSI

APLIKASI *CAYLEY TREE*
DALAM MENENTUKAN BANYAK ISOMER SENYAWA ALKANA

Disusun oleh:
Nely Indra Meifiani
NIM. 04305144007

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta pada hari / tanggal
Rabu / 23 Juli 2008
Dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh
Gelar Sarjana Sains

DEWAN PENGUJI

	Nama Lengkap	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua Penguji	: Emut, M. Si NIP. 131808333	....	....
Sekretaris	: Murdanu, M. Pd NIP. 132048518	....	....
Penguji Utama	: Caturiyati, M. Si NIP. 132255128	....	....
Penguji Pendamping	: Himmawati P L, M. Si NIP.132280881	....	....

Yogyakarta, ... 2008

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan

Dr.Ariswan
NIP. 131791367

MOTTO

TIDAK ADA RAHASIA UNTUK MENGGAPAI SUKSES. SUKSES ITU DAPAT TERJADI KARENA PERSIAPAN, KERJA KERAS, DAN MAU BELAJAR DARI KEGAGALAN...

BARANG SIAPA MENEMPUH JALAN UNTUK MENDAPATKAN ILMU, ALLAH AKAN MEMUDAHKAN BAGINYA JALAN MENUJU SURGA. (HR MUSLIM)

DAN MINTALAH PERTOLONGAN (KEPADA ALLAH SWT) DENGAN SABAR DAN SHALAT. DAN SESUNGGUHNYA YANG DEMIKIAN ITU SUNGGUH BERAT, KECUALI BAGI ORANG-ORANG YANG KHUSYU'. (QS: AL-BAQARAH: 45)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah, karya sederhana ini aku persembahkan untuk...

1. Ibu Bapakku Tercinta
Terima kasih atas do'a, kasih sayang, pengertian, kesabaran,
pengorbanan, dan dukungannya
yang telah diberikan semenjak aku lahir..
2. Adekku Tersayang Lina Dwi Khusnawati (Nana)
Terima kasih atas semuanya
Telah membeikan makna indahnya arti persaudaraan..
3. Mas Ris
Terima kasih atas dorongan dan dukungannya
Hingga terselesaikannya tugas akhir ini..
4. Teman-teman Math'04
Anggi, Lia, Do_why, Ria, Nopek, Nia, Anna, Susi, Nupus, Mamie, Irma, Henik,
Sigit, Johan, Fajar, Hendro, Sofyan, Yusfi
Kalian teman-teman seperjuanganku..
5. Sahabat-sahabatku
Mbak Indri, Diana, Mas Hari, Mas Yudi, Mas Aziz, Mas Heri,
Eka,Mbak Umi, Emi, Mas Hendra, Mbak Bina, dll
Terima kasih atas dukungan dan bantuannya
6. Teman-teman Kost Samirono CT 6 / 204
7. Guru-guru dalam hidupku
Jasamu tiada tara
....

APLIKASI *CAYLEY TREE*

DALAM MENENTUKAN BANYAK ISOMER SENYAWA ALKANA

Oleh :
Nely Indra Meifiani
(04305144007)

ABSTRAK

Penulisan skripsi ini bertujuan membahas aplikasi teori graf dalam ilmu kimia. Pembahasan lebih ditekankan pada penggunaan *Cayley Tree* dalam menentukan banyak isomer senyawa alkana, yang pada awalnya perhitungan jumlah isomer terbatas pada perhitungan secara manual, yaitu metode "*draw and count*".

Objek penulisan ini adalah perhitungan isomer alkana berdasarkan konsep *Cayley Tree*, karena struktur graf dari senyawa alkana adalah pohon (*tree*). Dengan membuktikan bahwa senyawa alkana adalah graf pohon yang memenuhi $E(G) = V(G) - 1$, dengan nilai $V(G) = 3n + 2$ dan $E(G) = 3n + 1$. Alkana dengan rumus kimia $C_n H_{2n+2}$ di mana setiap simpulnya memiliki derajat simpul satu atau empat, oleh karena itu pada perhitungannya digunakan $4 - Cayley \;\; Tree$.

Hasil dari studi dan penulisan menunjukkan bahwa banyak isomer senyawa alkana dapat ditentukan melalui penjumlahan dari banyaknya *Centered Tree* dan *Bicentered Tree*. *Centered Tree* adalah sebuah pohon dengan satu pusat yang mempunyai rumus $C_{2h}(z) = \sum_{n \geq 0} C_{2h,n} z^n$ dan *Bicentered Tree* adalah sebuah pohon dengan tepat dua pusat (pusat selalu berdekatan) yang mempunyai rumus $B_{2h+1}(z) = \sum_{n \geq 0} B_{2h+1,n} z^n$.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Aplikasi *Cayley Tree* dalam Menentukan Banyak Isomer Senyawa Alkana".

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan dorongan dari berbagai pihak, skripsi ini tidak akan terwujud. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Ariswan selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, yang telah memberi izin dan kesempatan kepada penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Hartono selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan izin kepada penulis untuk menyusun skripsi.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M.S. selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah turut membantu kelancaran penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Emut M.Si sebagai Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Murdanu M.Pd sebagai Dosen Pembimbing Pendamping yang telah membimbing, membantu, dan memberikan arahan serta masukan-masukan yang sangat membangun.

5. Seluruh dosen dan karyawan FMIPA UNY yang telah memberikan bantuan dalam bentuk apapun.
6. Kedua orang tuaku dan adikku yang senantiasa mendo'akanku.
7. Semua pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Semoga Allah SWT membalas mereka dengan kebaikan yang banyak. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini, oleh karena itu saran dan masukan sangat terbuka lebar. Penulis berharap karya ini dapat bermanfaat bagi kepentingan pendidikan pada khususnya dan dunia keilmuan pada umumnya.

Yogyakarta, 01 Juli 2008
Penulis

Nely Indra Meifiani

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

C	Carbon
H	Hidrogen
CH_4	Metana
C_2H_6	Etana
C_3H_8	Propana
C_4H_{10}	Butana
C_nH_{2n+2}	Alkana
Ø	Tidak kosong
$V(G)$	Himpunan Simpul G
$E(G)$	Himpunan Rusuk G
$\|V(G)\|$	Banyaknya Simpul G
$\|E(G)\|$	Banyaknya Rusuk G
$\circ(G)$	Order dari grup G
$d(v_i)$	Derajat simpul
$\delta(G)$	Derajat minimum
$\Delta(G)$	Derajat maksimum
B	Bilangan bulat
R	Himpunan
$*$	Operasi biner
S_n	Grup simetri
$\sim$	Ekuivalen
$\sigma \quad \mu$	Permutasi

S	Himpunan generator
$\Gamma = \Gamma(G, S)$	*Cayley graph*
$\alpha \quad \beta$	Generator
z	*Coordination number*
$\theta \quad \Phi$	Pemetaan satu-satu
$\cong$	Kongruen
C(z)	*Centered Tree*
B(z)	*Bicentered Tree*
h	Tinggi pohon
$T_{h,n}$	Jumlah (k-1) ary dengan n simpul dan tinggi pohon maksimum h
$2h$	Diameter pohon dengan satu pusat (*center*)
$2h$+1	Diameter pohon dengan dua pusat (*bicenter*)

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Teori graf pertama kali dikenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan terkenal dari Swiss yang bernama Euler. Teori Graf pertama muncul untuk memecahkan teka-teki masalah Jembatan Konigsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu. Konigsberg adalah suatu kota di Prusia bagian Timur Jerman. Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler tersebut, tidak ada perkembangan yang berarti berkenaan dengan teori graf. Tahun 1847, G. R. Kirchoff (1824-1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of Trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, Arthur Cayley (1821-1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon (Heri Sutarno, 2005: 65).

Seiring perkembangan zaman dan kemajuan teknologi yang semakin canggih, aplikasi teori graf telah merambah disiplin ilmu pengetahuan dan membantu memudahkan orang untuk menyelesaikan permasalahan. Penggunaan graf ditekankan untuk memodelkan persoalan. Teori ini juga sangat berguna untuk mengembangkan model-model yang terstruktur dalam berbagai situasi. Dalam implementasinya teori ini banyak dijumpai pada bidang elektro, kimia organik, ilmu komputer, dan lain sebagainya. Bahkan dewasa ini teori graf digunakan secara besar-besaran dalam bidang ekologi, geografi, antropologi, genetika, fisika, elektronika, pemrosesan informasi, arsitektur, dan desain. Dalam ilmu kimia, teori graf dapat diterapkan dalam struktur kuantum elektronis, mekanika molekul, simulasi fase kondensasi, desain struktur molekul, polimer, topografi, energi potensial, dan makromolekul biologik (termasuk protein). Belakangan ini penerapan graf khususnya berkaitan dengan isomer struktur molekul, yaitu molekul yang mengandung karbon (Reisha Humaria, 2007: 1).

Seperti halnya senyawa-senyawa organik, dalam senyawa koordinasi dikenal pula adanya isomer. Menurut Kristian H. Sugiyarto (2006: 2.13) isomer adalah senyawa yang mempunyai rumus molekul sama tetapi memiliki struktur berbeda. Lebih jauh lagi, menurut Reisha Humaria (2007: 1) isomerisme bahan kimia merupakan konsep yang sangat penting dalam kimia modern. Pada awal dikenalnya isomer dalam kimia, jumlah isomer dari suatu senyawa ditentukan dengan cara menggambar lalu menghitungnya (*Draw and Count Method)*. Metode ini dilakukan terhadap senyawa yang mempunyai struktur yang sederhana. Akan tetapi, secara umum dibutuhkan suatu metode untuk menghitung isomer senyawa yang lebih kompleks.

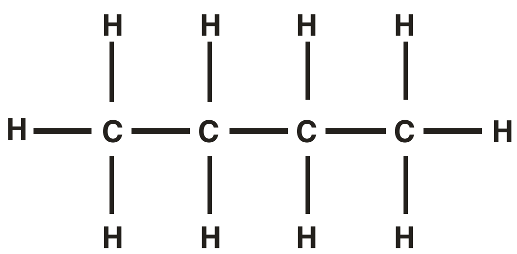
Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang kimia, mendorong para ilmuwan melakukan penelitian dalam menghitung jumlah isomer. Misalnya, tahun 1874 Cayley menghitung banyak isomer senyawa kimia dengan konsep graf. Penelitian dilanjutkan oleh George Polya dengan menggunakan kombinatorial untuk menentukan jumlah isomer senyawa kimia. Teori Polya ini sangat relevan untuk jenis perhitungan kombinatorik.

Penentuan isomer dalam ilmu kimia tidak dilakukan secara sembarangan. Ada aturan khusus dalam penentuannya, misalnya dalam penamaan senyawa pada setiap struktur yang terbentuk. Walaupun mempunyai rumus molekul yang sama, tetapi strukturnya berbeda isomer-isomer tersebut mempunyai sifat yang berbeda pula. Dalam teori graf perhitungan jumlah isomer dapat dilakukan dengan mudah dengan cara mengabaikan sifat-sifat dalam kimia. Karena perhitungan isomer dengan graf sifat-sifat dalam kimia tidak mempengaruhi hasil.

Bentuk struktur dari susunan kimia adalah sebuah diagram yang menyatakan ikatan antara atom-atom dalam molekul. Salah satu senyawa kimia yang banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari adalah hidrokarbon, yaitu senyawa yang terdiri dari atom Carbon (C) dan atom Hidrogen (H). Hidrokarbon dibagi atas hidrokarbon asiklik dan siklik. Hidrokarbon asiklik memiliki struktur pohon, dan dibagi atas tiga kelompok. Yaitu Alkana dengan rumus kimia C_nH_{2n+2} di mana mengandung ikatan tunggal, Alkena dengan rumus kimia C_nH_{2n} di mana mengandung ikatan rangkap, dan Alkuna dengan rumus kimia C_nH_{2n-2} di mana mengandung ikatan rangkap tiga. Sementara hidrokarbon siklik ditandai dengan adanya struktur tertutup seperti cincin. Hidrokarbon siklik dibagi atas dua kategori, yaitu Sikloalkana dengan rumus kimia C_nH_{2n} dan Hidrokarbon aromatik dengan rumus kimia C_6H_6. Dari semua penggolongan hidrokarbon, atom C dan atom H yang menyusun senyawa tersebut tetap mempunyai sifat yang sama yaitu atom C mempunyai empat tangan, yang dapat berikatan dengan empat atom lainnya dan atom H yang mempunyai satu tangan hanya dapat berikatan dengan satu atom saja. Dengan menyimbolkan atom C dengan simpul hitam putih (◘), dan atom H dengan simpul hitam (●), senyawa tersebut dapat digambarkan dengan mudah dalam bentuk graf. Semua jenis hidrokarbon di atas dapat ditentukan banyak isomernya, tapi pada skripsi ini penulis hanya membahas penentuan banyak isomer senyawa alkana.

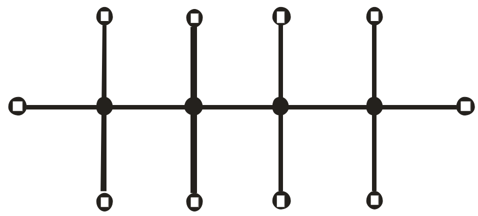
Graf dengan teori pohonnya dapat digunakan dengan mudah untuk menyelesaikan masalah dalam kimia, khususnya dalam menentukan banyak isomer senyawa alkana. Karena penyelesaian dalam graf sangat sederhana dan tidak serumit jika ditentukan melalui ilmu kimia, dengan catatan sifat-sifat yang mempengaruhi perhitungan diabaikan. Untuk menyelesaikan permasalahan, senyawa alkana perlu dimodelkan. Graf dengan berbagai teorinya sangat cocok untuk memodelkan senyawa kimia tersebut. Dalam pemodelan menggunakan graf, unsur yang berikatan disimbolkan sebagai **simpul** dan ikatan-ikatan kimia yang terjadi disimbolkan dengan **rusuk**. Bentuk graf suatu senyawa mempunyai makna bahwa suatu senyawa yang terdapat di alam dikatakan stabil apabila mempunyai bentuk seperti yang dimodelkan dalam bentuk graf.

Sebagai contoh pemodelan adalah senyawa Butana (C_4H_{10}).



Gambar 1.1 C_4H_{10}(Butana)

Gambar 1.1, merupakan senyawa C_4H_{10} (Butana) yang terdiri dari dua jenis atom penyusun, yaitu atom C sebanyak empat dan atom H sebanyak sepuluh, maka dari **Gambar 1.1** diperoleh suatu graf yang merepresentasikan Butana.



Gambar 1.2. Representasi C_4H_{10}(Butana) dalam Graf

Dari **Gambar 1.2**, dapat ditemukan empatbelas simpul yang merepresentasikan jumlah atom dan tigabelas rusuk yang merepresentasikan jumlah ikatan antar atom pada senyawa Butana.

Perhitungan isomer senyawa C_4H_{10} dapat dengan mudah ditentukan dengan cara *Draw and Count Methods*, akan tetapi untuk senyawa yang lebih kompleks khususnya pada senyawa alkana (C_nH_{2n+2}), metode *Draw and Count Method* tidak mudah untuk diterapkan. Maka dari itu akan dicoba metode lain yang masih dalam ruang lingkup graf, perhitungan dengan menggunakan konsep *Cayley Graph* yaitu *Cayley Tree*. Struktur alkana digambarkan sebagai graf. Jumlah isomer yang berkorespondensi dengan jumlah graf yang bisa dibuat. Karena struktur graf dari senyawa alkana merupakan pohon, maka perhitungan dilakukan melalui pohon, yaitu *Cayley Tree*.

Dalam perkuliahan Teori Graf di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta, Teori Graf telah menyajikan suatu teori yang sangat penting dalam kimia teoritis, yaitu *Cayley Tree*. Suatu teori yang dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan dalam penentuan banyak isomer senyawa kimia. Oleh karena itu, penulis mengkaji salah satu aplikasi Teori Graf pada ilmu kimia yaitu Aplikasi *Cayley Tree* dalam menentukan banyak isomer senyawa alkana.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana menentukan banyak *k-Cayley Tree*?
2. Bagaimana aplikasi Teori Graf dalam menentukan banyak isomer senyawa Alkana?

C. Tujuan Penulisan

1. Untuk menentukan banyak *k-Cayley Tree*.
2. Untuk mengetahui aplikasi Teori Graf dalam menentukan banyak isomer senyawa Alkana.

D. Manfaat Penulisan

1. Bagi Penulis

   Dengan mengetahui cara menentukan jumlah isomer senyawa alkana dengan *Cayley Tree* maka diharapkan dapat menambah referensi pengetahuan teori graf dan aplikasinya di bidang kimia.

2. Bagi Ilmu Pengetahuan

   Penulisan ini diharapkan dapat memberikan konstribusi bagi pengembangan Teori Graf, khususnya di bidang Ilmu Kimia.

3. Bagi Instansi

   Penulisan ini diharapkan dapat dijadikan sebagai salah satu referensi informasi bagi pihak yang berkepentingan.

BAB II

DASAR TEORI

Pada bab ini akan disampaikan materi-materi berkaitan dengan graf khususnya *Cayley Tree* dan hidrokarbon khususnya alkana, yang merupakan landasan bagi pembahasan pada Bab III. Sebelum membahas *Cayley Tree* lebih lanjut, akan diuraikan terlebih dahulu mengenai beberapa istilah dasar dalam teori graf dan kimia.

A. Graf

1. Pengertian Graf

Menurut Goodaire & Parmenter (2006: 289), **Graf** G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G),E(G))$, dengan himpunan simpul tidak boleh kosong yang unsur-unsurnya disebut simpul (*vertek*) dan $E(G)$ mungkin kosong yang unsur-unsurnya disebut rusuk (*edge*). Jika v dan w adalah sepasang simpul yang berbeda di G, vw melambangkan rusuk di G, dan jika $e=vw$ adalah rusuk di G, maka:

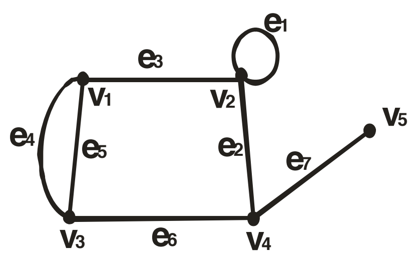
a. v dan w berikatan (*adjacent*) di G

b. rusuk e hadir (*joining*) simpul v dan w di G

c. v dan w adalah simpul-simpul ujung rusuk di e

d. rusuk e hadir (*incident*) di simpul v dan w atau sebaliknya dikatakan simpul v dan w hadir pada rusuk e.

Cara mempresentasikan sebuah graf yang paling umum adalah dengan diagram. Dalam diagram tersebut, titik-titik dinyatakan sebagai simpul dan tiap sisi dinyatakan sebagai rusuk sederhana yang menghubungkan tiap dua simpul. **Gambar 2.1** menunjukkan suatu contoh representasi graf.



Gambar 2.1 Graf G_1 dengan Lima Simpul dan Tujuh Rusuk

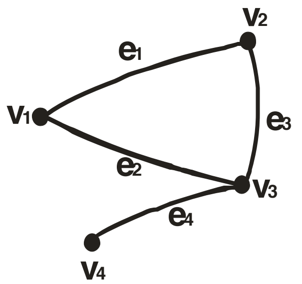
Dalam sebuah graf, seperti pada **Gambar 2.1**, dimungkinkan adanya suatu rusuk yang dua simpul ujungnya sama disebut gelang (*loop*), yaitu e_1. Sementara untuk dua simpul berbeda yang dikaitkan oleh dua atau lebih rusuk disebut rusuk ganda atau rusuk rangkap, yaitu e_4 dan e_5 (Heri Sutarno, 2005: 66-67).

2. Jenis - Jenis Graf

Secara umum rusuk pada graf mempunyai orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah, graf dapat dikolompokkan menjadi dua jenis (Grimaldi, 1999: 478) yaitu :

a. Graf Tidak Berarah (*undirected graph*)

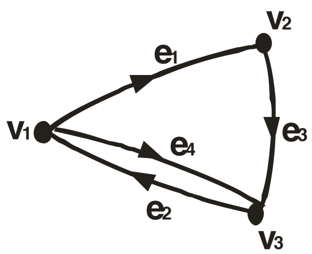
Graf yang rusuknya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tidak berarah. Pada graf tidak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh rusuk tidak diperhatikan. Jadi uv dan vu menyatakan rusuk yang sama. Sebagai contoh **Gambar 2.2** adalah graf tidak berarah, dengan v_1v_2 atau v_2v_1 menunjukkan rusuk e_1, v_1v_3 atau v_3v_1 menunjukkan rusuk e_2, v_2v_3 atau v_3v_2 menunjukkan rusuk e_3, dan v_3v_4 atau v_4v_3 menunjukkan rusuk e_4.



Gambar 2.2 Graf Tidak Berarah *G_2*

b. Graf Berarah (*Directed graph*)

Graf yang setiap rusuknya diberikan orientasi arah disebut graf berarah(*directed graph* atau *digraph)*. Pada graf berarah, rusuk berarahnya disebut busur (*arc*). Pada graf berarah *uv* dan *vu* menyatakan dua busur yang berbeda. Dengan kata lain, $uv \neq vu$. Pada dasarnya graf berarah tidak berbeda dengan graf yang telah diuraikan pada pengertian graf sebelumnya, hanya saja pada graf berarah setiap rusuk mempunyai arah tertentu. **Gambar 2.3** menunjukkan contoh graf berarah dengan rusuk $e_1 = v_1v_2$, rusuk $e_2 = v_3v_1$, rusuk $e_3 = v_2v_3$ dan rusuk $e_4 = v_1v_3$.



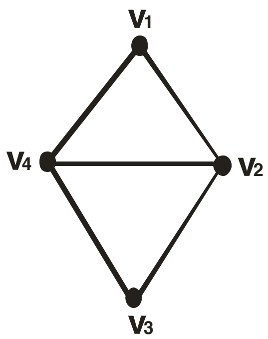
Gambar 2.3 Graf Berarah *G_3*

Graf berarah pada **Gambar 5** terdiri dari $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Sesuai dengan kekhasan strukturnya, graf dapat dibedakan atas dua jenis (Wilson & Watkins, 1990: 10), yaitu :

a. Graf Sederhana

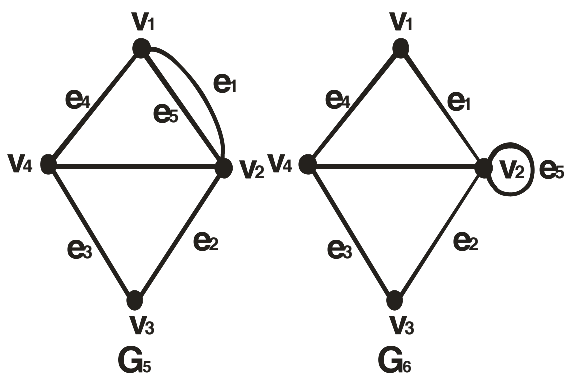
Graf yang tidak memuat gelang maupun rusuk ganda dinamakan graf sederhana. **Gambar 2.4** merupakan contoh graf sederhana G_4. Pada **Gambar 2.4**, rusuk-rusuknya tunggal dan tidak terdapat gelang.



Gambar 2.4 Graf Sederhana *G_4*

b. Graf tidak Sederhana

Graf yang memuat rusuk ganda atau gelang dinamakan graf tidak sederhana. **Gambar 2.5** merupakan contoh graf tidak sederhana.



Gambar 2.5 Graf tidak Sederhana *G_5* dan *G_6*

B. Derajat (*Degree*) Simpul

Banyaknya rusuk yang hadir pada suatu simpul v_i (loop dihitung dua kali), disebut **derajat (*degree*)** dari simpul tersebut; dinotasikan $d(v_i)$. Derajat suatu simpul sering juga disebut **valensi** dari simpul tersebut. Derajat minimum dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ dan derajat maksimumnya dinotasikan dengan $\Delta(G)$.

Contoh 2.1

Derajat (*degree*) dari suatu simpul dapat dilihat pada **Gambar 2.1**

$d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3$, $d(v_2) = 4$**,** dan $d(v_5) = 1$. Jadi, $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G)$=4.

Teorema 2.1 (Chartrand, 1985: 28)

Untuk sebarang graf G dengan n simpul dan m rusuk berlaku sifat

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

Bukti:

Jika semua derajat simpulnya dijumlahkan, maka setiap rusuk dihitung dua kali yaitu masing-masing sekali untuk setiap simpul yang dihubungkannya.

Sebagai contoh 2.2, pada **Gambar 2.1**

$d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) = 3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 14 =$ dua kali jumlah rusuk.

C. Keterhubungan

Pada subbab ini akan dibahas pengertian dasar keterhubungan dalam suatu graf. Pengertian yang dimaksud adalah **jalan** (*walk*), **jejak** (*trail*), **lintasan** (*Path*), **Sikel** (*Cycle*), serta graf terhubung dan komponen pada graf.

1. **Pengertian Dasar dalam Graf**

a. **Jalan** (*walk*)

Misal *G* adalah sebuah graf. Sebuah jalan (*walk*) di G adalah sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_k, v_k)$ yang suku-sukunya bergantian simpul dan rusuk, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah simpul-simpul akhir rusuk e_i untuk $1 \le i \le k$. *W* dikatakan sebagai jalan dari v_0 ke v_k, atau (v_0, v_k). Simpul v_0 dan v_k berturut-turut disebut simpul awal dan simpul akhir *W*. Sedangkan simpul-simpul $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$ disebut simpul-simpul internal dari *W* dan *k* disebut panjang *W*. Panjang jalan *W* adalah banyaknya rusuk dalam *W*. Jalan *W* disebut jalan tertutup jika simpul awal dan simpul akhir *W* identik sama. Dengan kata lain, *W* jalan tertutup bila $v_0 = v_k$.

b. **Jejak** (*trail*)

Misal $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_k, v_k)$ adalah sebuah jalan di graf *G*. *W* disebut jejak (*trail*) jika semua rusuk $e_1, e_2, e_3, ..., e_k$ dalam jalan *W* berbeda. Dengan kata lain, jejak (*trail*) adalah jalan tanpa rusuk berulang.

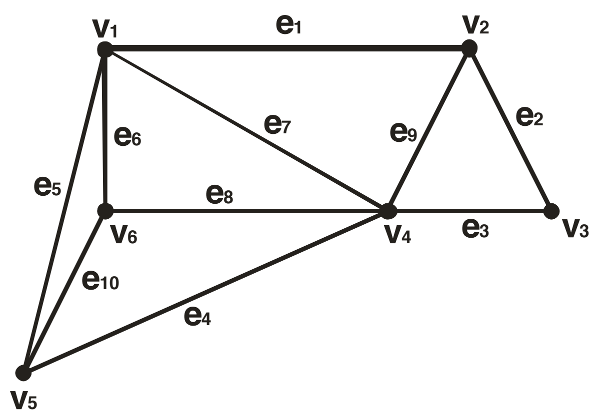
c. **Lintasan** (*Path*)

Misal $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_k, v_k)$ adalah sebuah jalan di graf *G*. *W* disebut lintasan (*Path*) jika semua simpul dan rusuk dalam jalan *W* berbeda.

d. **Sikel** (*Cycle*)

Sikel (*Cycle*) adalah sebuah jejak tertutup (*closed trail*) yang simpul awal dan semua simpul internalnya berbeda. Banyaknya rusuk dalam suatu sikel disebut panjang sikel tersebut. Sikel dengan panjang k disebut k-sikel. Sebuah sikel yang memuat semua simpul graf disebut *sikel hamilton*. Sebuah graf yang memuat *sikel hamilton* disebut *Graf Hamilton*.

Definisi di atas dapat dijelaskan dengan **Gambar 2.6** berikut.



Gambar 2.6 Graf G_9

(Jalan, Jejak, Lintasan, Sikel)

Diberikan contoh-contoh dari definisi di atas:

Jalan (*walk*): $W = (v_1, e_7, v_4, e_9, v_2, e_9, v_4, e_3, v_3)$ adalah sebuah jalan di graf G_9. Jalan (v_1, v_3) di graf G_9 mempunyai panjang 4. Karena dalam barisan ini rusuk e_9 muncul lebih dari sekali, jelas barisan ini bukan jejak.

Jejak (*Trail*): $W=(v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_9,v_2)$ adalah sebuah jejak di graf G_9 dengan panjang 4. Karena v_2 muncul dua kali, maka jejak ini bukan lintasan.

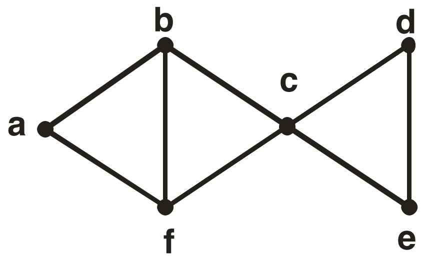
Lintasan (*Path*) : $W=(v_1,e_1,v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_4,v_5,e_{10},v_6)$ adalah sebuah lintasan di graf G_9 dengan panjang 5.

Sikel (*Cycle*): $W=(v_1,e_1,v_2,e_9,v_4,e_8,v_6,e_6,v_1)$adalah sebuah sikel di graf G_9 dengan panjang 4.

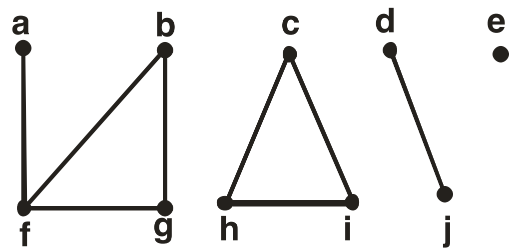
2. Graf Terhubung dan Komponen

Sebuah graf G disebut terhubung (*connected*), jika untuk setiap dua simpul u dan v di G terdapat lintasan di G yang menghubungkan kedua simpul tersebut. Sebaliknya graf G disebut graf tidak terhubung (*disconnected*), jika ada dua simpul di G yang tidak mempunyai lintasan yang menghubungkan kedua simpul tersebut.

Sebuah komponen dari graf G adalah sebuah graf bagian terhubung maksimal (simpul dan rusuk) dari G. Jadi, setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen, sedangkan graf tak terhubung mempunyai lebih dari satu komponen. **Gambar 2.7** menunjukkan contoh graf G_7 yang merupakan graf terhubung dengan satu komponen saja. Sedangkan **Gambar 2.8** merupakan contoh graf G_8 yang merupakan graf tidak terhubung yang memiliki empat buah komponen.



Gambar 2.7 Graf Terhubung G_7 dengan 1 Komponen

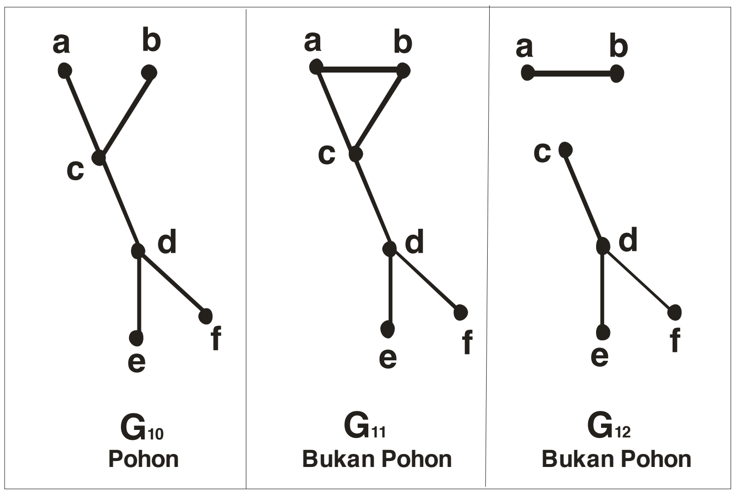


Gambar 2.8 Graf Tidak Terhubung G_8 dengan 4 Komponen

D. Pohon (*Tree*)

Definisi 2.1 (Grimaldi, 1999: 547)

Misal $G=(V,E)$ adalah graf sederhana yang tidak berarah. Graf G disebut pohon (*tree*) jika G terhubung dan tidak memuat sikel.



Gambar 2.9 Pohon dan Bukan Pohon

Pada **Gambar 2.9** terdapat graf G_{10} yang merupakan pohon. Karena graf G_{10} terhubung dan tidak memuat sikel. Graf G_{11} bukan pohon, karena mengandung sikel {a,b}, {b,c}, {c,a}. Graf G_{12} bukan pohon, karena tidak terhubung. Meskipun G_{12} bukan pohon, namun setiap komponen dari G_{12} adalah pohon.

Teorema 2.2 (Grimaldi, 1999: 549)

Banyaknya simpul dari pohon T sama dengan banyaknya rusuk ditambah 1 atau

$$|V(T)| = |E(T)| + 1$$

dengan $|V(T)|$ = banyaknya simpul T

$|E(T)|$ = banyaknya simpul T

Bukti :

Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika pada $|V(T)|$.

1. Untuk simpul n=1, maka rusuk T adalah nol

   $$|V(T)| = |E(T)| + 1$$
   $$1 = 0 + 1$$
   $$1 = 1$$

   Jadi $|V(T)| = |E(T)| + 1$ benar.

2. Diasumsikan untuk jumlah simpul *n=k*

   $|V_k(T)| = |E_k(T)| + 1$ benar.

   Akan dibuktikan benar untuk *n=k+1*

   Artinya $|V_{k+1}(T)| = |E_{k+1}(T)| + 1$

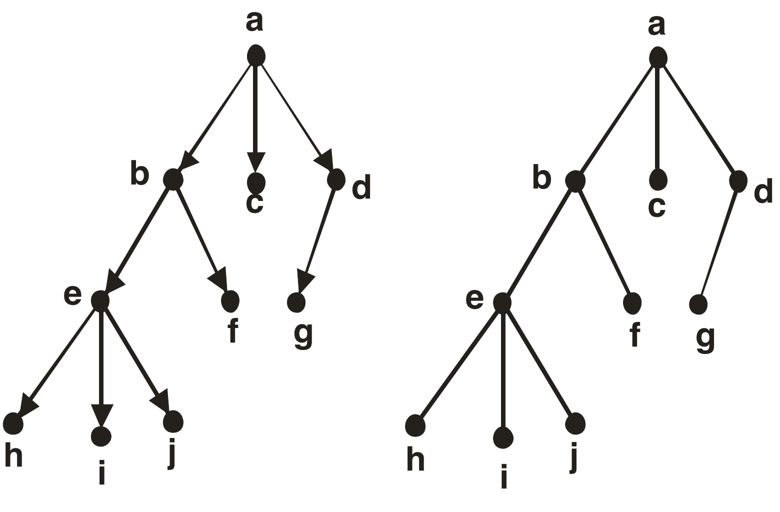
Misalkan T adalah pohon dengan k+1 simpul dan ℓ adalah sebuah rusuk T. Maka, T- ℓ memiliki tepat dua komponen T_1 dan T_2, dan masing-masing komponen adalah pohon dengan simpul kurang dari k+1.

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
\left|V_{k+1}(T)\right| &= \left|E_{k+1}(T)\right| + 1 \\
\left|V_{k+1}(T)\right| &= \left|V_k(T)\right| + \left|V(T)\right| \\
&= \left|E_k(T)\right| + 1 + \left|E_k(T)\right| + 1 \\
&= \left(\left|E_k(T)\right| + \left|E_k(T)\right| + 1\right) + 1 \\
&= \left|E_{k+1}(T)\right| + 1
\end{aligned}$$

E. Pohon Berakar (*Rooted Tree*)

Pohon yang satu buah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan rusuk-rusuknya diberi arah sehingga menjadi graf berarah dinamakan **pohon berakar** (*rooted tree*). **Gambar 2.10** mengilustrasikan pohon berakar.



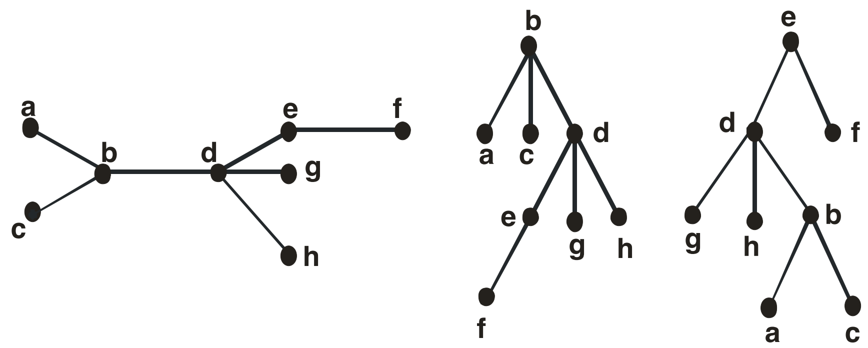
(a) (b)

Gambar 2.10

(a) Pohon Berakar

(b) Tanda panah pada sisi yang dibuang

Gambar 2.11 menunjukkan pohon dan dua buah pohon berakar yang dihasilkan dari pemilihan dua simpul berbeda sebagai akar

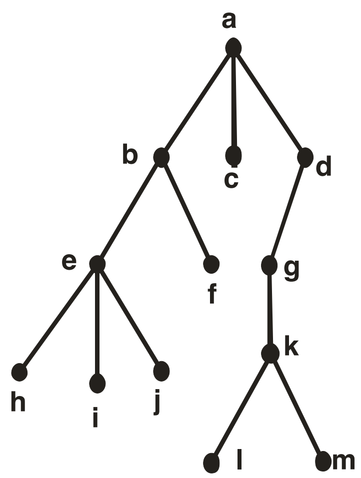


(a) (b) (c)

Gambar 2.11

(a) pohon (b) *b* sebagai akar (c) *e* sebagai akar

Sebagaimana pada graf, akan sering menggunakan terminologi yang berhubungan dengan pohon. Di bawah ini didaftarkan beberapa terminologi yang penting pada pohon berakar. Untuk ilustrasi, pohon pada **Gambar 2.12** dipakai sebagai contoh untuk menjelaskan terminologi yang dimaksudkan. Simpul-simpul pada pohon diberi label untuk mengacu simpul mana yang dimaksudkan. Kebanyakan terminologi pohon yang ditulis di bawah ini diadopsi dari terminologi botani dan silsilah keluarga.



Gambar 2.12 Pohon Berakar

Definisi 2.2 (Amir Muntaha, 2008: 2)

Anak (*child* atau *children*) adalah simpul setelah suatu simpul dalam pohon dan Orangtua (*Parent*) adalah simpul sebelum suatu simpul lain dalam satu pohon.

Jadi, dari **Gambar 2.12** dapat diketahui bahwa b, c, dan d adalah anak-anak simpul a, a adalah orangtua dari anak-anak itu.

Definisi 2.3 (Amir Muntaha, 2008: 2)

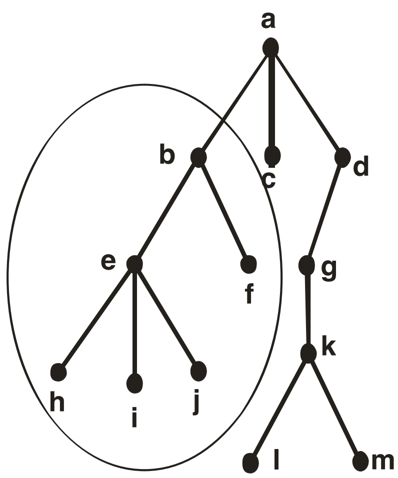
Saudara kandung (*sibling*) adalah simpul yang mempunyai orangtua yang sama.

Jadi dari **Gambar 2.12** diketahui f adalah saudara kandung e, tetapi g bukan saudara kandung e, karena orangtua mereka berbeda.

Definisi 2.4 (Amir Muntaha, 2008: 2)

Upapohon (*subtree*) adalah pohon yang dibentuk dengan memotong pohon yang sudah ada.

Untuk lebih jelasnya, upapohon dapat dijelaskan melalui **Gambar 2.13**



Gambar 2.13 Upa Pohon

Definisi 2.5 (Amir Muntaha, 2008: 2)

Daun (*leaf*) adalah simpul paling ujung dalam sebuah pohon. Jadi daun tidak mempunyai anak dan berderajat 0.

Simpul h, i, j, f, c, l, dan m adalah daun.

Definisi 2.6 (Amir Muntaha, 2008: 2)

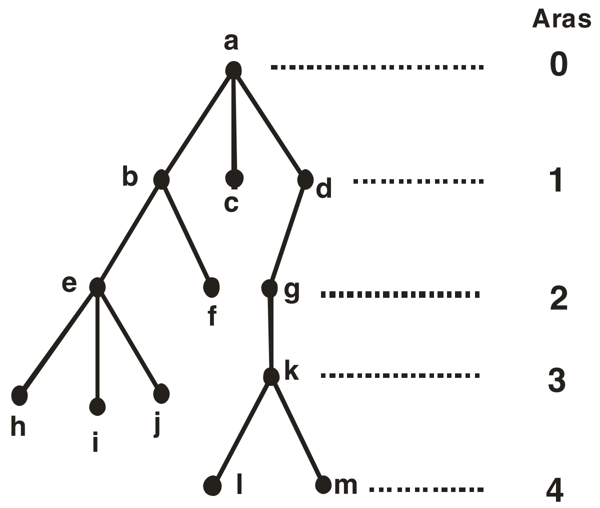
Simpul yang mempunyai upapohon atau anak disebut Simpul dalam (*internal nodes*)

Simpul b, d, e, g, dan k adalah simpul dalam.

Definisi 2.7 (Amir Muntaha, 2008: 2)

Aras (*level*) maksimum dari suatu pohon disebut tinggi (*height*) atau kedalaman (*depth*) pohon tersebut.

Pohon pada **Gambar 2.14** di bawah mempunyai tinggi 4.



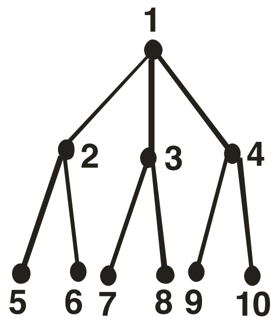
Gambar 2.14 Pohon dengan Tinggi 4

Definisi 2.8 (Gross & Yellen, 2005: 126)

k-ary tree $(k \geq 2)$ adalah pohon berakar yang setiap simpul cabangnya mempunyai paling banyak k anak (*children*).

Jika $k = 2$, pohonnya disebut pohon biner (*binary tree*)

Contoh 2.3



Gambar 2.15 *3-ary tree* dengan 2 Level

Definisi 2.9 (Gross & Yellen, 2005: 126)

Complete k-ary tree adalah *k-ary tree* di mana pada setiap simpul internalnya mempunyai tepat k anak dan pada semua daunnya mempunyai tinggi yang sama.

Banyaknya simpul internal pohon *k-ary* dengan tinggi *h* adalah

$$1 + k + k^2 + \ldots + k^{h-1} = \sum_{i=0}^{h-1} k^i$$
$$= \frac{k^h - 1}{k - 1}$$

Bukti

Misalkan *P*(*h*) menyatakan $1 + k + k^2 + \ldots + k^{h-1} = \frac{k^h - 1}{k - 1}$

1. untuk *h*=1, maka

   $$P(1) = 1 = \frac{k^1 - 1}{k - 1}$$
   $$1 = 1$$

   Jadi *P*(*h*) benar untuk *h*=1

2. Diasumsikan untuk *h*=*n* *P*(*h*) benar, yaitu

   sehingga $1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} = \frac{k^n - 1}{k - 1}$

   Akan dibuktikan untuk *h*=*n*+1 *P*(*h*) benar, yaitu

   $$1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

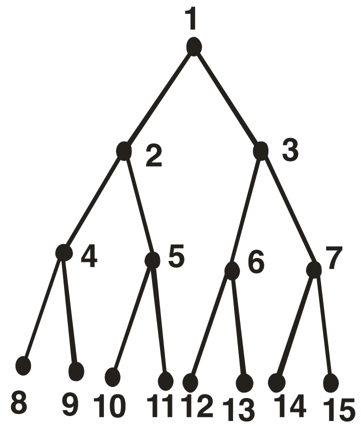
   ditunjukkan

   $$1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} + k^n = \frac{k^n - 1}{k - 1} + k^n$$
   $$= \frac{k^n - 1}{k - 1} + \frac{k - 1(k^n)}{k - 1}$$
   $$= \frac{k^n - 1 + k^{n+1} - k^n}{k - 1}$$
   $$= \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \qquad \text{(terbukti)}$$

$$\therefore P(h) = 1 + k + k^2 + ... + k^{h-1} = \frac{k^h - 1}{k - 1}$$

Contoh 2.4

Complete binary tree mempunyai $2^h - 1$ simpul internal. Jika levelnya adalah 3, maka jumlah simpul internalnya adalah 7. **Gambar 2.16** berikut merupakan *complete binary tree* dengan 3 level.



Gambar 2.16 C*omplete Binary Tree* dengan 3 Level

F. Operasi Biner

Misalkan *R* suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $*$ pada elemen-elemen *R* disebut operasi biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in R$ maka $(a * b) \in R$. Atau dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ merupakan pemetaan dari $R \times R$ ke *R*. Sehingga dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ pada *R* bersifat tertutup.

Contoh 2.5

1. Operasi + pada B dengan B = $\{ b | b$ bilangan bulat$\}$ adalah operasi biner.

   Sebab:

a. $(\forall a,b \in \mathrm{B})\ \ a+b \in \mathrm{B}$ (operasi + tertutup pada B)

b. $(\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathrm{B} \times \mathrm{B}).\ \ (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 \ \&\ b_1 = b_2$$
$$\Rightarrow a_1 + b_1 = a_2 + b_2$$

$\therefore (\forall a,b \in \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\forall (a,b) \in \mathrm{B} \times \mathrm{B})$ (hasil operasi + tunggal)

2. Operasi pembagian bukan suatu operasi biner pada B, sebab terdapat $a = 4 \in \mathrm{B}$ dan $b = 5 \in \mathrm{B}$ dengan $\frac{4}{5} \notin \mathrm{B}$ atau $(\exists\ \ 4{,}5 \in \mathrm{B})\frac{4}{5} \notin \mathrm{B}$

G. Grup

Dalam matematika, **grup** adalah suatu himpunan beserta satu operasi biner, seperti perkalian atau penjumlahan. Cabang matematika yang mempelajari grup disebut teori grup. Asal-usul teori grup berawal dari kerja Evariste Galois (1830), yang berkaitan dengan masalah persamaan aljabar.

Definisi 2.10 (Fraleigh, 1998: 52)

Misalkan *G* adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $*$ pada *G* adalah suatu operasi biner. Himpunan *G* bersama-sama dengan operasi $*$ ditulis $(G, *)$, adalah suatu grup bila memenuhi aksioma-aksioma:

1. Bersifat asosiatif

   $\forall a,b,c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$

2. *G* memuat elemen identitas, misal *e*

   $\exists e \in G \ni \forall x \in G$ berlaku $x * e = e * x = x$

3. Setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula

   $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$, a^{-1} adalah invers dari a, sedemikian hingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Definisi 2.11 (Fraleigh, 1998: 94)

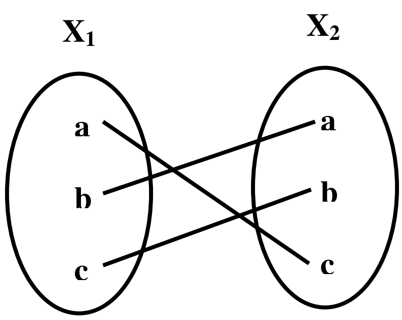
Permutasi pada sebuah himpunan X dimaksudkan sebagai fungsi dari X ke X yang bersifat satu-satu dan onto.

Contoh 2.6

Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dan terdapat permutasi $\alpha : X \to X$, maka permutasi α dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Gambar 2.17 merepresentasikan fungsi α dari X ke X



Gambar 2.17 Fungsi α

Ditunjukkan fungsi α bersifat satu-satu dan onto

1. $a,\ b \in X_1, a \neq b$ maka $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. (satu-satu)

2. $\forall a \in X_2, \exists b \in X_1 \ni a = \alpha(b)$. (onto)

Jadi α merupakan sebuah permutasi, di mana $\alpha(a) = c$; $\alpha(b) = a$; dan $\alpha(c) = b$.

Definisi 2.12 (Fraleigh, 1998: 96)

Misalkan $X = \{1,2,3,...,n\}$, maka grup dari semua permutasi pada *X* disebut **grup simetri** n, dan dinotasikan sebagai S_n.

Contoh 2.7

Misalkan $X = \{1,2,3\}$ maka S_3 memiliki elemen sebanyak 3!=6. Semua permutasi pada *X* dapat disebutkan sebagai berikut.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1), \qquad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3),$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3), \qquad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3),$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2), \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2).$$

Dapat dibuktikan bahwa $S_3 = \{a,b,c,d,e,f\}$ merupakan sebuah grup terhadap operasi perkalian permutasi.

Contoh 2.8

Jika S_3 adalah himpunan semua pemetaan bijektif dari *S* ke *S* dengan $S = \{1,2,3\}$, maka S_3={(1), (1 2), (1 3), (2 3), (1 3 2), (1 2 3)}. Akan dibuktikan bahwa S_3 dengan komposisi fungsi.

Tabel 2.1 Tabel Cayley di S_3

$*$	**(1)**	**(1 2)**	**(1 3)**	**(2 3)**	**(1 3 2)**	**(1 2 3)**
(1)	(1)	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 3 2)	(1 2 3)
(1 2)	(1 2)	(1)	(1 3 2)	(1 2 3)	(1 3)	(2 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1)	(1 3 2)	(2 3)	(1 2)
(2 3)	(2 3)	(1 3 2)	(1 2 3)	(1)	(1 2)	(1 3)
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)	(1 2)	(1 3)	(1 2 3)	(1)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)	(2 3)	(1 2)	(1)	(1 3 2)

Dari Tabel *Cayley* di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Operasi $*$ pada S_3 bersifat tertutup. Hal ini dapat dilihat dari Tabel *Cayley* yang menunjukkan bahwa hasil dari setiap komposisi dua elemen di S_3 adalah juga elemen dari S_3
2. Operasi $*$ pada S_3 bersifat assosiatif, yaitu $\forall a,b,c \in S_3$ berlaku $(a*b)*c = a*(b*c)$. Sesuai dengan sifat komposisi fungsi.
3. Ada elemen identitas, yaitu (1), karena $\forall a \in S_3$, berlaku $a*(1) = (1)*a = a$
4. Setiap elemen di S_3 mempunyai invers di S_3. $\forall a \in S_3, \exists a^{-1} \in S_3$, dengan a^{-1} adalah invers dari a, sedemikian sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$

   invers dari (1) adalah (1)

   invers dari (12) adalah (12)

   invers dari (13) adalah (13)

   invers dari (23) adalah (23)

invers dari (132) adalah (123)

invers dari (123) adalah (132)

karena operasi $*$ pada S_3 memenuhi aksioma-aksioma dalam Definisi 2.10, maka $(S_3,*)$ adalah suatu grup.

Definisi 2.13 (De Koninck, 2007: 6)

Misalkan $a,\ b \in Z,\ m \neq 0.$ a kongruen b modulo m (ditulis: a$\equiv$b(mod m)), jika m|a-b; jika a tidak kongruen b modulo m (ditulis: a$\not\equiv$ b(mod m))

Contoh 2.9

26 ≡ 4 (mod 11) sama artinya dengan 26 = 11.2 + 4

Definisi 2.14 (Weisstein, 2008: 1)

Banyaknya elemen grup *G* disebut order dari grup *G* dan ditulis $\circ(G)$.

Contoh 2.10

Misalkan *G*={1, 2, 3, 4, 5, 6} dengan perkalian bilangan modulo 7 adalah suatu grup, maka $\circ(G) = 6$ karena banyaknya elemen dari grup *G* adalah 6.

H. Orbit dan *Cycle*

Perkalian permutasi didefinisikan sebagai fungsi komposisi

$$\sigma^n = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{n\ kali}$$

Akan dibuktikan bahwa $\left(\sigma^{-1}\right)^n = \sigma^{-n}$

$$\left(\sigma^{-1}\right)^n = \underbrace{\sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \ldots \circ \sigma^{-1}}_{n\ kali}$$

Misalkan

$$\left(\sigma^{m}\right)^{n} = \underbrace{\sigma^{m} \circ \sigma^{m} \circ \sigma^{m} \circ \ldots \circ \sigma^{m}}_{n\ kali}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{m\ kali} \circ \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma \circ}_{m\ kali} \ \ldots \ \circ \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{m\ kali}}_{n\ kali}$$

$$= \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{m.n\ kali}$$

$$\left(\sigma^{m}\right)^{n} = \sigma^{m.n}$$

diambil $m = -1$

$$\left(\sigma^{-1}\right)^{n} = \sigma^{-1.n}$$

$$\left(\sigma^{-1}\right)^{n} = \sigma^{-n} \qquad (\text{terbukti})$$

Akan dibuktikan bahwa $\sigma^{n+m} = \sigma^{n} \circ \sigma^{m}$

$$\sigma^{n} . \sigma^{m} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{n\ kali} \circ \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{m\ kali}$$

$$= \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{(n+m) kali}$$

$$\sigma^{n} \circ \sigma^{m} = \sigma^{n+m} \qquad (\text{terbukti})$$

Misalnya σ suatu permutasi pada himpunan *A* dan didefinisikan relasi ~ pada *A* oleh a ~ b jika dan hanya jika $b = \sigma^{n}(a), \forall a, b \in A$, dan n suatu bilangan bulat.

Relasi ini bersifat

1. Refleksif, yaitu a ~ a, $\forall a \in A$

   Bukti:

   $\sigma^{n}(a) = a$

   Ambil $n = 0 \in Z$

   Maka $\sigma^{n}(a) = \sigma^{0}(a) = a$

2. Simetris, yaitu a ~ b $\rightarrow$ b ~ a

   Bukti:

   diketahui a ~ b maka $b = \sigma^n(a)$ untuk suatu $n \in Z$

   $b = \sigma^n(a) \rightarrow a = \sigma^{-n}(b)$ untuk suatu $-n \in Z$, maka b ~ a

3. Transitif, yaitu a ~ b dan b ~ c maka a ~ c

   Bukti:

   a ~ b $\rightarrow$ $b = \sigma^m(a)$, untuk suatu bilangan bulat m

   b ~ c $\rightarrow$ $c = \sigma^n(b)$, untuk suatu bilangan bulat n

   maka

   $$\begin{aligned} c &= \sigma^n(b) \\ c &= \sigma^n(\sigma^m(a)) \\ &= \sigma^{(n+m)}(a) \quad \rightarrow \quad a \sim c \end{aligned}$$

Dari ketiga sifat tersebut menunjukkan bahwa relasi ~ adalah suatu relasi ekuivalensi pada *A* dan mengakibatkan partisi pada *A* atas kelas-kelas ekuivalensi.

Definisi 2.15 (Fraleigh, 1998: 123)

Misalkan σ merupakan sebuah permutasi pada himpunan *A*. Kelas-kelas ekuivalensi yang ditentukan oleh relasi ekuivalensi

$$a \sim b \Leftrightarrow b = \sigma^n(a)$$

merupakan **orbit-orbit** untuk σ .

Contoh 2.11

Ditentukan σ adalah sebuah permutasi pada S_8 .

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & 6 & 3 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pada S_8 dapat dicari orbit dengan mengaplikasikan σ berulangkali sampai kembali pada elemen semula.

$\sigma(1) = 7$ maka $1 \sim 7$

$\sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \sigma(7) = 2$ maka $1 \sim 2$

$\sigma^3(1) = \sigma(\sigma^2(1)) = \sigma(2) = 1$

$\sigma^1(3) = 5$ maka $3 \sim 5$

$\sigma^2(3) = \sigma(\sigma(3)) = \sigma(5) = 3$

$\sigma(4) = 6$ maka $4 \sim 6$

$\sigma^2(4) = \sigma(\sigma(4)) = \sigma(6) = 8$ maka $4 \sim 8$

$\sigma^3(4) = \sigma(\sigma^2(4)) = \sigma(8) = 4$

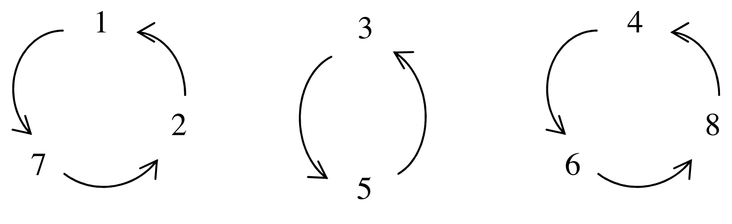
Berikut ini alur yang didapatkan dari permutasi σ di atas.

$1 \to 7 \to 2 \to 1$, $3 \to 5 \to 3$, $4 \to 6 \to 8 \to 4$

Sehingga orbit-orbit untuk σ adalah

$$\{1,7,2\},\ \{3,5\},\ \{4,6,8\}$$

Orbit-orbit σ dapat digambarkan sebagai berikut



Apabila diperhatikan, maka setiap orbit pada contoh di atas dapat menentukan sebuah permutasi baru dalam S_8 dengan ketentuan bahwa elemen yang menjadi anggota orbit akan ditransformasikan sedangkan elemen-elemen lainnya tetap.

Misalkan saja orbit yang pertama $\{1,7,2\}$ dengan alur $1 \to 7 \to 2 \to 1$ dapat membentuk sebuah permutasi

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian permutasi μ hanya memiliki 1 orbit yang beranggotakan lebih dari 1 elemen. Permutasi yang demikian disebut sebagai *cycle*. Berikut definisi formalnya.

Definisi 2.16 (Fraleigh, 1998: 125)

Sebuah permutasi $\sigma \in S_n$ disebut ***cycle*** jika σ memiliki paling banyak satu orbit yang memuat lebih dari satu elemen. **Panjang** sebuah *cycle* adalah banyaknya elemen pada orbit terbesar.

Contoh 2.12

Sebagaimana telah disebutkan pada permutasi μ, permutasi μ merupakan sebuah *cycle* dengan panjang 3 dan dinotasikan sebagai

$$\mu = (1,7,2)$$

Tidak seperti pada orbit, urutan elemen pada penulisan sebuah *cycle* akan menentukan alur pemutasinya. Misalnya $(1,7,2) = (7,2,1) = (2,1,7)$ tetapi $(1,7,2) \neq (1,2,7)$. Sebagaimana telah diketahui bahwa himpunan orbit sebuah permutasi merupakan partisi pada S_n, sehingga orbit-orbit sebuah permutasi merupakan hmpunan-himpunan yang saling asing.

Cycle Index untuk grup permutasi *G* ditunjukkan sebagai berikut:

$$a_1^{j_1(g)} a_2^{j_2(g)} a_3^{j_3(g)} \ldots$$

$j_k(g)$ menunjukkan banyaknya *cycle g* dengan panjang *k* dari hasil penguraian *cycle g* yang saling asing. Misalkan *G* adalah grup permutasi dengan order *m* dan derajat *n,* setiap permutasi *g* di *G* mempunyai *cycle* saling asing yang diuraikan secara tunggal.

Cycle Index untuk grup simetri akan ditentukan sebagai berikut:

1. $S_2 = \{(1),\ (1,\ 2)\}$

Vertex Interchange		Grup Permutasi		Cycle Index
$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}$	=	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_1^2
$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$	=	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_2^1

Jadi *Cycle Index* untuk S_2 adalah $\frac{1}{2!}\left(a_1^2 + a_2^1\right)$

2. S_3 ={(1), (1 2), (1 3), (2 3), (1 3 2), (1 2 3)}

Vertex Interchange		Grup Permutasi		Cycle Index
$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$	=	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_1^3
$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$	=	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_3^1
$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$	=	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_3^1

$\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	$a_2^1 a_1^1$
$\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	$a_2^1 a_1^1$
$\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	$a_2^1 a_1^1$

Jadi *Cycle Index* untuk S_3 adalah $\frac{1}{3!}\left(a_1^3 + 3a_2^1 a_1^1 + 2a_3^1\right)$

3. S_4= {(1), (4 3 1 2), (4 1 2 3), (3 4 2 1), (3 1 4 2), (2 3 4 1), (2 4 1 3), (4 3), (4 2), (3 2), (4 1), (3 1), (2 1), (2 3 1), (3 1 2), (3 4 1), (4 1 3), (2 4 1), (4 1 2), (3 4 2), (4 2 3), (2 1) (4 3), (3 1) (4 2), (4 1) (3 2)}

Vertex Interchange		Grup Permutasi		Cycle Index
$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_1^4
$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_4^1
$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_4^1
$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_4^1
$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_4^1
$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_4^1
$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{matrix}$	=	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$\rightarrow$	a_4^1

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{matrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix} \rightarrow a_2^1a_1^2$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{matrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\4&2\end{pmatrix} \rightarrow a_2^1a_1^2$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{matrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix} \rightarrow a_2^1a_1^2$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{matrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix} \rightarrow a_2^1a_1^2$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{matrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix} \rightarrow a_2^1a_1^2$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{matrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} \rightarrow a_2^1a_1^2$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{matrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{matrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{matrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&4\\3&4&1\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{matrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&4\\4&1&3\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{matrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\2&4&1\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{matrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\4&1&2\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{matrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\3&4&2\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{matrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4\\4&2&3\end{pmatrix} \rightarrow a_3^1a_1^1$$

$$\begin{matrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{matrix} = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&3\end{pmatrix} \rightarrow a_2^2$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow a_2^2$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow a_2^2$$

Jadi *Cycle Index* untuk S_4 adalah $\frac{1}{4!}\left(a_1^4 + 6a_2^1a_1^2 + 8a_3^1a_1^1 + 3a_2^2 + 6a_4^1\right)$

I. Graf Cayley (*Cayley Graph*)

Dalam matematika, Cayley Graph juga dikenal dengan nama *Cayley Colour Graph*. Konsep ini diperkenalkan oleh Arthur Cayley, yang merupakan teori dasar untuk memahami *Cayley Tree*.

Definisi 2.17 (Weisstein, 2008: 1)

Himpunan generator dari suatu grup adalah himpunan elemen-elemen dari grup itu sendiri yang memungkinkan pengulangan generator tersebut maupun kombinasi antar generatornya dapat menghasilkan elemen-elemen grup.

Contoh 2.13

Misalkan Z_6 adalah operasi penjumlahan modulo 6 adalah grup, Z_6={0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Himpunan generatornya adalah {1}, {2, 5}, {2, 3, 4}.

Diperoleh dengan cara sebagai berikut:

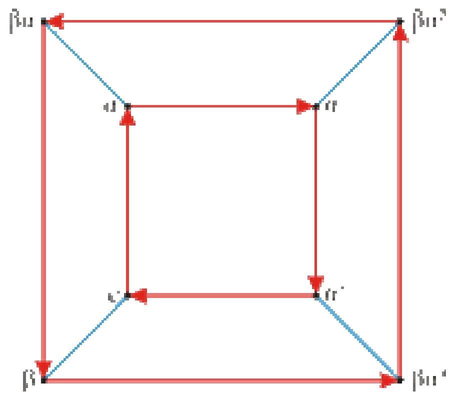
Untuk $\{1\}$	Untuk $\{2, 5\}$	Untuk $\{2, 3, 4\}$
$1.0 = 0$	$2.0 + 5.0 = 0$	$1.0 + 3.1 + 4.2 = 5$
$1.1 = 1$	$2.1 + 5.1 = 1$	$2.1 + 3.1 + 4.2 = 1$
$1.2 = 2$	$2.2 + 5.2 = 2$	$2.3 + 3.1 + 4.3 = 3$
$1.3 = 3$	$2.3 + 5.3 = 3$	$2.1 + 3.2 + 4.2 = 4$
$1.4 = 4$	$2.4 + 5.4 = 4$	$2.5 + 3.4 + 4.2 = 0$
$1.5 = 5$	$2.5 + 5.5 = 5$	$2.1 + 3.4 + 4.3 = 2$

Definisi 2.18 (http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley_graph)

Misalkan G adalah grup dan S adalah himpunan generator. *Cayley Graph* $\Gamma = \Gamma(G,S)$ adalah Graf berwarna berarah (*Colored Directed Graph*) yang dibentuk sebagai berikut:

a. setiap elemen g dari G dinyatakan sebagai simpul: himpunan simpul $V(\Gamma)$ dari Γ dinyatakan dengan G.
b. setiap elemen s dari S dinyatakan sebagai warna.
c. untuk setiap $g \in G$, $s \in S$, simpulnya berkorespondensi pada elemen g dan gs yang digabungkan oleh rusuk berarah yang berwarna, yaitu c_s. Maka dari itu, himpunan rusuk $E(\Gamma)$ terdiri dari pasangan (g, gs), dengan $s \in S$ sebagai penyedia warna.

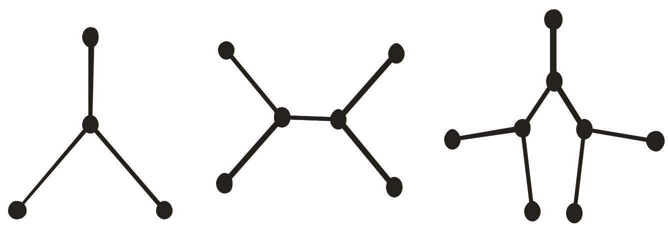
Cayley Graph pada *Dihedral group* D_4 pada dua elemen, misalnya pada α dan β akan di jelaskan malalui **Gambar 2.18**. Pada **Gambar 2.18** tanda panah merah merepresentasikan perkalian kiri oleh elemen α. Sedangkan elemen β adalah inverse terhadap dirinya sendiri, garis biru merepresentasikan perkalian kiri oleh elemen β yang tidak berarah. Oleh karena itu graf ini terbentuk, yang memiliki delapan simpul, delapan tanda panah, dan empat rusuk. Tabel *Cayley* pada grup D_4 dapat ditentukan melalui suatu grup yaitu $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^4 = \beta^2 = e, \alpha\beta = \beta\alpha^3 \rangle$.



Gambar 2.18 ***Cayley Graph*** **pada** ***Dihedral group D₄***

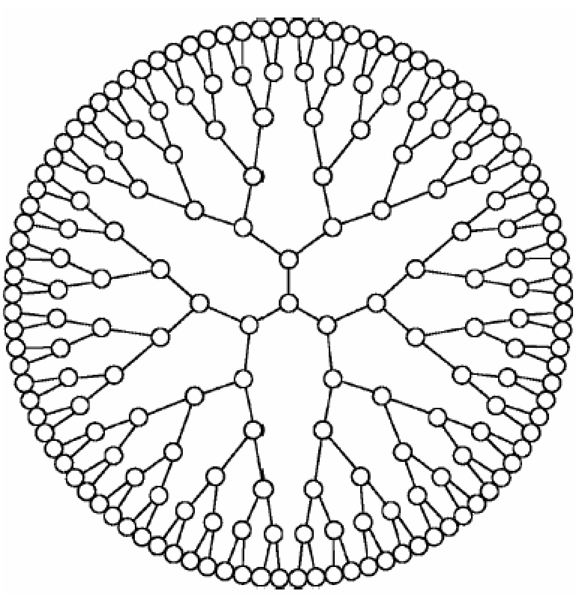
J. Pohon Cayley (*Cayley Tree*)

Cayley Tree atau yang disebut dengan *Bethe Lattice*, diperkenalkan oleh Hans Bethe pada tahun 1935. *Cayley Tree* dengan *coordination number* z adalah graf bercabang yang setiap simpulnya terhubung dengan sebanyak z simpul yang lain dan tidak memuat loop. **Gambar 2.19** menunjukkan sejumlah *3-Cayley tree*



Gambar 2.19 ***Cayley tree***

Cayley tree bisa digambarkan sebagai suatu struktur yang terus mengembang dari simpul pusat, dengan semua simpul disusun melingkari simpul pada *level* sebelumnya. Simpul pusat dapat disebut juga sebagai akar, seperti pada **Gambar 2.20.**



Gambar 2.20 ***3-Cayley Tree***

Setiap simpul pada **Gambar 2.20** digambarkan terhubung pada persekitaran z. Jika z adalah *coordination number,* maka simpul pada level k bisa di hitung dengan

$N_k = z(z-1)^{k-1}$ untuk $k \geq 0$.

Pada **Gambar 2.20** $z = 3$ dan k=1, 2, 3, 4, 5, 6 sehingga

$$\begin{aligned} N_1 &= 3(3-1)^{1-1} \\ &= 3(2)^0 \\ &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N_3 &= 3(3-1)^{3-1} \\ &= 3(2)^2 \\ &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N_5 &= 3(3-1)^{5-1} \\ &= 3(2)^4 \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$N_2 = 3(3-1)^{2-1} \qquad N_4 = 3(3-1)^{4-1} \qquad N_6 = 3(3-1)^{6-1}$$
$$= 3(2)^1 \qquad = 3(2)^3 \qquad = 3(2)^5$$
$$= 6 \qquad = 24 \qquad = 96$$

K. Graf Isomorfik

Definisi 2.19 (Heri Sutarno, 2005: 85)

Sebuah graf G disebut **isomorfik** dengan graf H jika terdapat pemetaan satu-satu θ (yang disebut isomorfisme dari $V(G)$ ke $V(H)$) sedemikian sehingga θ mempertahankan ketetanggaan. Jadi, $(u,v)\in E(G)$ jika dan hanya jika $(\theta(u),\theta(v))\in E(H)$. Jika graf G disebut isomorfik dengan graf H, dinotasikan dengan $G \cong H$.

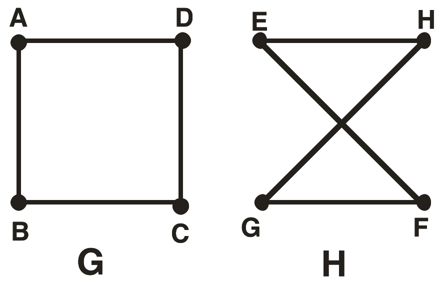
Jika G adalah suatu graf dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan rusuk $E(G)$. H adalah graf dengan himpunan simpul $V(H)$ dan himpunan rusuk $E(H)$. G isomorfik dengan H jika dan hanya jika ada korespondensi satu-satu

$$\theta : V(G) \to V(H)$$
$$\Phi : E(G) \to E(H)$$

Akibatnya $V(G)$ dan $V(H)$ memiliki elemen yang sama banyaknya, atau G dan H berorder sama. Misalkan u dan v adalah dua titik dari G dan misalkan pula bahwa $\theta(u) = u$ dan $\theta(v) = v$, maka u dan v bertetangga dalam G jika dan hanya jika $\theta(u)$ dan $\theta(v)$ bertetangga dalam H. Dengan kata lain uv merupakan rusuk dari G jika dan hanya jika $\theta(u)\theta(v)$ merupakan rusuk dari H.

Selanjutnya untuk mengetahui dua buah graf adalah isomorfik dapat dilakukan dengan memperhatikan rusuk yang menghubungkan v_i dan v_j dalam G

sama dengan banyaknya rusuk yang menhubungkan pasangan simpul yang berkorespondensi dengan v_i dan v_j dalam H. Oleh karena itu jika G dan H adalah suatu graf yang isomorfik, maka berakibat $|V(G)| = |V(H)|$ dan $|E(G)| = |E(H)|$. Sebagai contoh dua buah graf isomorfik yaitu diperlihatkan pada **Gambar 2.21**



Gambar 2.21 Graf Isomorfik

Graf G dan H pada **Gambar 2.21** merupakan dua buah graf isomorfik, karena mempunyai jumlah rusuk dan simpul yang sama, dan terdapat korespondensi satu-satu antara graf G dan H yakni $A \leftrightarrow E, D \leftrightarrow H, B \leftrightarrow F, C \leftrightarrow G$.

Dari **Definisi 2.19** maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa dua graf dikatakan isomorfik jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. Jumlah simpul G = jumlah simpul H (mempunyai jumlah simpul yang sama).
2. Jumlah rusuk G = jumlah rusuk H (mempunyai jumlah sisi yang sama).
3. Jumlah rusuk yang mempunyai derajat tertentu dalam graf G dan H sama (mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu).

L. Hidrokarbon

Hidrokarbon adalah sebuah senyawa yang terdiri dari unsur C dan H. Seluruh hidrokarbon memiliki rantai C dan atom-atom H yang berikatan dengan rantai tersebut. Hidrokarbon sebagai salah satu senyawa organik merupakan senyawa kimia yang dapat dibagi atas hidrokarbon asiklik dan siklik. Hidrokarbon asiklik memiliki unsur pohon dan bisa dibagi atas tiga kelompok, yaitu alkana, alkena, dan alkuna. Untuk selanjutnya, pembahasan akan dibatasi pada alkana saja.

Definisi 2.20 (Daintith, 1999: 253)

Elektron valensi adalah elektron-elektron di atom yang terlibat dalam ikatan kimia.

Elektron valensi merupakan jumlah elektron yang terdapat pada kulit paling luar dari sebuah atom netral. Dalam pokok bahasan ini, elektron valensi adalah representasi dari derajat masing-masing simpul.

Definisi 2.21 (Mulyono, 2006: 165)

Hidrogen (bahasa Latin: *hydrogenium*, dari bahasa Yunani: *hydro*: air, *genes*: membentuk) adalah unsur kimia pada tabel periodik yang memiliki simbol **H** dan nomor atom satu. Pada suhu dan tekanan standar, hidrogen tidak berwarna, tidak berbau, bersifat non-logam, dan bervalensi tunggal.

Hidrogen hanya dapat berikatan dengan satu unsur saja, karena hidrogen bervalensi tunggal. Hidrogen dilambangkan simpul hitam putih.

Definisi 2.22 (Mulyono, 2006: 212)

Karbon merupakan unsur kimia yang mempunyai simbol **C** dan nomor atom enam pada tabel periodik. Karbon merupakan unsur non-logam dan bervalensi empat.

Karbon dapat berikatan dengan empat unsur, karena karbon bervalensi empat. Unsur yang berikatan tersebut dapat berupa sesama karbon atau unsur kimia yang lain, misalnya **H**. Unsur Karbon direpresentasikan sebagai simpul hitam.

Definisi 2.23 (Daintith, 1999: 10)

Alkana adalah sebuah hidrokarbon dengan rumus umum C_nH_{2n+2}. Alkana adalah senyawa jenuh, dan tidak mengandung ikatan rangkap dua atau rangkap tiga.

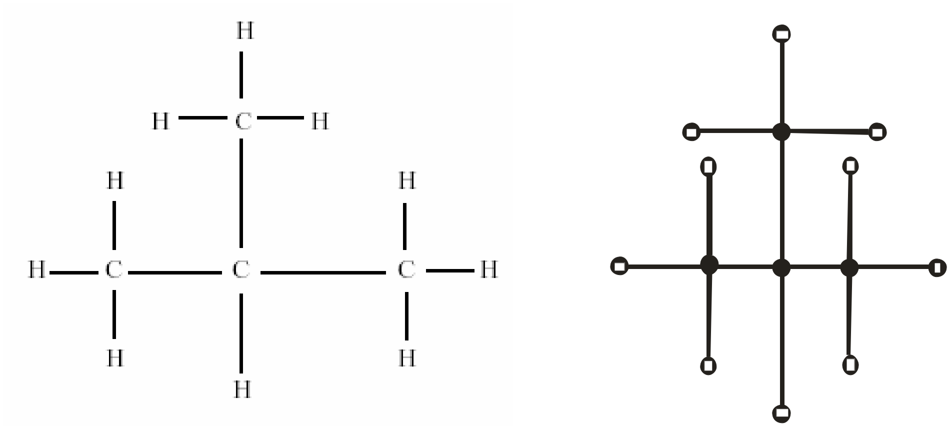
Setiap n atom carbon pada C_nH_{2n+2} berkorespondensi pada simpul berderajat empat pada graf. Berlaku pula untuk $2n+2$ atom hidrogen berkorespondensi pada simpul berderajat satu.

Definisi 2.24 (Kristian H. Sugiyarto: 2006: 2.13)

Isomer adalah senyawa yang mempunyai rumus molekul sama tetapi memiliki struktur berbeda.

Unsur karbon mempunyai empat elektron valensi dan hidrogen mempunyai satu elektron valensi. Jika memodelkan sebuah senyawa hidrokarbon sebagai sebuah graf, maka atom karbon dan Hidrogen kita simbolkan sebagai simpul dan ikatan antara karbon dengan hidrogen sebagai rusuk. Elektron valensi dari masing-masing atom melambangkan derajat dari masing-masing simpul. Oleh karena atom karbon mempunyai empat elektron valensi, maka simpul yang melambangkan atom karbon mempunyai empat derajat simpul, begitu juga dengan atom hidrogen, atom hidrogen mempunyai satu elektron valensi, maka simpul yang melambangkan atom hidrogen hanya mempunyai satu derajat simpul. Perlu ditekankan bahwa, banyaknya derajat simpul untuk masing-masing simpul harus dipenuhi ketika menggambarkan senyawa (hidrokarbon) dalam bentuk graf. Hal ini penting karena berkaitan dengan kestabilan suatu senyawa (hidrokarbon).

Gambar 2.22 di bawah ini merepresentasikan C_4H_{10} (Iso-Butana) dalam graf.



Gambar 2.22 Representasi C_4H_{10}(Iso-Butana) dalam Graf

BAB III

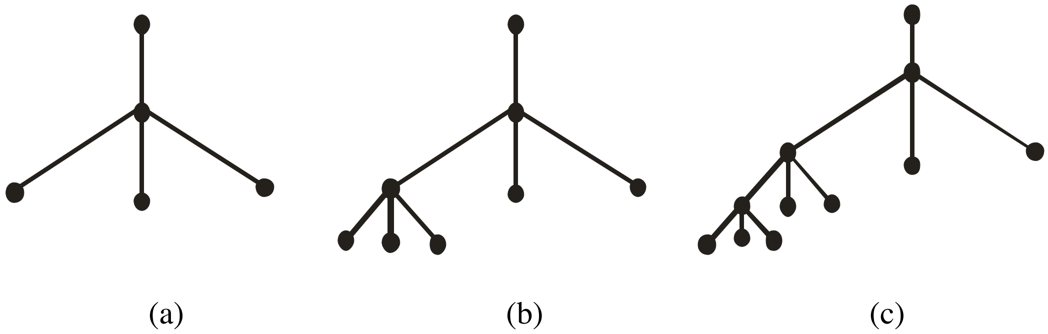
PEMBAHASAN

Sebagaimana telah diuraikan pada Bab I bahwa permasalahan yang menjadi fokus penulisan ini adalah penentuan banyak *k-Cayley Tree* dan aplikasi Teori Graf dalam menentukan banyak isomer senyawa Alkana.

A. Penentuan Banyak *k-Cayley Tree*

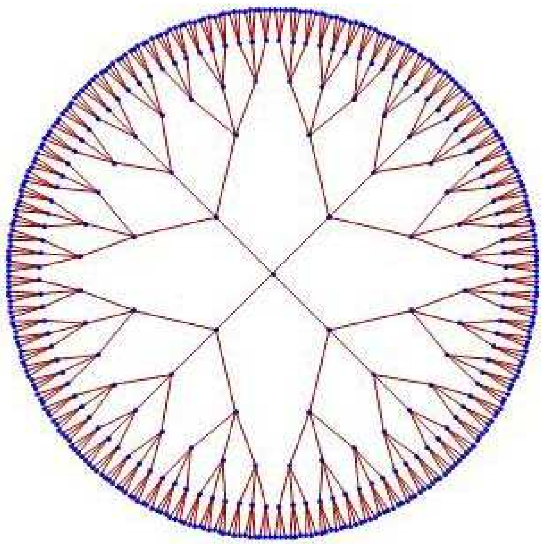
Pada subbab ini akan dibahas mengenai penentuan banyak *k-Cayley Tree* yang digunakan dalam perhitungan banyak isomer senyawa alkana. Di mana pada perhitungannya akan digunakan konsep *Centered Tree* dan *Becentered Tree*.

Mengingat bahwa alkana adalah hidrokarbon asiklik yang memiliki struktur mirip pohon, maka perhitungan isomer senyawa alkana dilakukan dengan menggunakan konsep dasar *Cayley Tree*. Alkana dengan rumus kimia C_nH_{2n+2} di mana setiap simpulnya mempunyai derajat satu atau empat, maka pada pembahasan ini menggunkan konsep *4-Cayley Tree*. **Gambar 3.1** berikut menunjukkan *4-Cayley Tree*.



Gambar 3.1
(a) Alkana dengan n=1 dalam bentuk *Cayley Tree*
(b) Alkana dengan n=2 dalam bentuk *Cayley Tree*
(c) Alkana dengan n=3 dalam bentuk *Cayley Tree*

Gambar 3.1 dapat digambarkan sebagai suatu struktur yang terus mengembang dari simpul pusat dengan semua simpul disusun melingkari simpul pada *level* sebelumnya seperti contoh pada **Gambar 3.2**.



Gambar 3.2 ***4-Cayley Tree***

Gambar 3.2 adalah *Calley Tree* dengan akar pohon mempunyai z=4, maka simpul pada level k bisa di hitung dengan

$N_k = z(z-1)^{k-1}$ untuk $k \geq 0$

$$
\begin{aligned}
k = 1 \Rightarrow N_1 &= 4(4-1)^{1-1} \\
&= 4(3)^0 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k = 2 \Rightarrow N_2 &= 4(4-1)^{2-1} \\
&= 4(3)^1 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k = 3 \Rightarrow N_2 &= 4(4-1)^{3-1} \\
&= 4(3)^2 \\
&= 36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k = 4 \Rightarrow N_2 &= 4(4-1)^{4-1} \\
&= 4(3)^3 \\
&= 108
\end{aligned}
$$

Dan seterusnya sampai n.

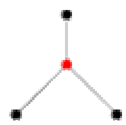
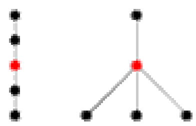
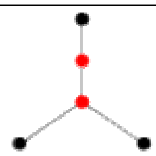
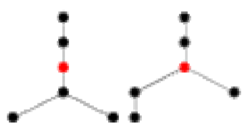
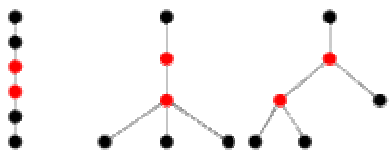
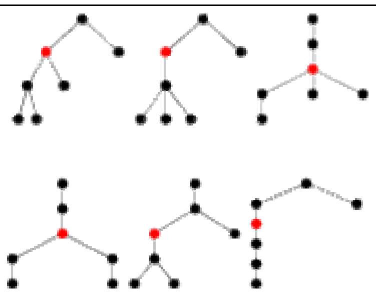
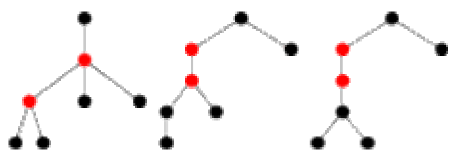
Sebuah graf dengan keunikan yang dimiliki pada simpul v didefinisikan sebagai jarak yang khas dari simpul v ke simpul yang lainnya. Pusat graf adalah simpul yang memiliki sifat tunggal. Sebuah graf dapat mempunyai jumlah simpul yang berbeda pada pusatnya. Untuk sebuah pohon, hanya ada dua kemungkinan, yaitu:

1. Sebuah pohon dengan tepat satu pusat (*Centered Tree*)
2. Sebuah pohon dengan tepat dua pusat (*Bicenterd Tree*), dalam kasus ini pusat selalu berdekatan.

Untuk lebih jelasnya, maka *Centered Tree* dan *Bicenterd Tree* akan ditunjukkan pada **Tabel 3.1** sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel Banyak Graf Isomorfik

yang Ditentukan Melalui Metode *Draw and Count Method*

n	*Centered*	*Bicentered*	Total
1			1
2			1
3			1
4			2
5			3
6			5
7			9
...	...	...	...

Tabel 3.1 memperlihatkan perhitungan *Centered* dan *bicentered* dengan cara *Draw and Count Method*, tetapi untuk perhitungan selanjutnya akan digunakan cara yang lebih efisien yaitu dengan rumus yang dalam perhitungannya dibantu dengan program Maple. Suatu Pohon dengan lintasan terpanjang (diameter) 2*m* mempunyai sebuah simpul yang unik disebut *center*, pada titik tengah lintasan yang panjangnya 2*m*. Pada pohon dengan lintasan terpanjang (diameter) 2*m*+1 terdapat pasangan simpul yang unik disebut *bicenter,* pada pertengahan lintasan yang panjangnya 2*m*+1.

Oleh karena itu akan dibahas perhitungan isomer berdasarkan konsep *center* dan *bicenter*.

1. *Centered Tree* $C(z)$

Untuk suatu *k-Cayley Tree*, misalkan $T_{h,n}$ adalah jumlah $(k-1)-ary$ dengan *n* adalah simpul dan tinggi pohon maksimum *h*.

Sebagai perjanjian, pohon kosong mempunyai *h*=-1

Misalkan $T_h(z)=\sum_{n\geq 0} T_{h,n} z^n$, maka

$$T_{-1}(z)=1$$

$$T_0(z)=1+z$$

Dan untuk *h*>1

$$T_{h+1}(z)=1+zS_{k-1}(T_h(z))$$

$$T_1(z) = \sum_{n=0}^{10} T_{1,n} z^n$$

$$= T_{1,0} + T_{1,1} z + T_{1,2} z^2 + T_{1,3} z^3 + T_{1,4} z^4 + T_{1,5} z^5 + T_{1,6} z^6 + T_{1,7} z^7 + T_{1,8} z^8 + T_{1,9} z^9 + T_{1,10} z^{10}$$

$$T_2(z) = \sum_{n=0}^{10} T_{2,n} z^n$$

$$= T_{2,0} + T_{2,1} z + T_{2,2} z^2 + T_{2,3} z^3 + T_{2,4} z^4 + T_{2,5} z^5 + T_{2,6} z^6 + T_{2,7} z^7 + T_{2,8} z^8 + T_{2,9} z^9 + T_{2,10} z^{10}$$

$$T_3(z) = \sum_{n=0}^{10} T_{3,n} z^n$$

$$= T_{3,0} + T_{3,1} z + T_{3,2} z^2 + T_{3,3} z^3 + T_{3,4} z^4 + T_{3,5} z^5 + T_{3,6} z^6 + T_{3,7} z^7 + T_{3,8} z^8 + T_{3,9} z^9 + T_{3,10} z^{10}$$

seterusnya sampai *h*

Keterangan:

$T_{1,0}(z)$ menyatakan banyak jumlah pohon berakar (*k*-1)-*ary* dengan 0 adalah simpul dan tinggi pohon maksimum 1.

$T_{1,1}(z)$ menyatakan banyak jumlah pohon berakar (*k*-1)-*ary* dengan 1 adalah simpul dan tinggi pohon maksimum 1.

$T_{3,1}(z)$ menyatakan banyak jumlah pohon berakar (*k*-1)-*ary* dengan 1 adalah simpul dan tinggi pohon maksimum 3.

Dan seterusnya….

$$T_{h+1}(z) = 1 + zS_{k-1}(T_h(z))$$

$S_m(f(z))$ adalah hasil dari subsitusi $f(z)$ ke *cycle index* untuk grup simetri berorder *m*=3 dan *m*=4.

$$S_3(f(z)) = \frac{\left(f(z)^3 + 3f(z)f(z^2) + 2f(z^3)\right)}{3!}$$

$$S_4(f(z)) = \frac{\left(f(z)^4 + 6f(z^2)f(z)^2 + 8f(z^3)f(z) + 3f(z^2)^2 + 6f(z^4)\right)}{4!}$$

Misalkan $C_{2h,n}$ adalah jumlah *center* dari *k-Cayley trees* dengan *n* adalah simpul dan *2h* adalah diameter pohon.

Ambil $C_{2h}(z) = \sum_{n \geq 0} C_{2h,n} z^n$

Dengan menghapus simpul *center* dan sisi yang berdekatan dengannya, akan didapatkan sejumlah pohon yang berkorespondensi dengan *k-tuple* pohon berakar (*k-1*)-*ary* dengan tinggi maksimum *h*-1. Paling tidak terdapat dua pohon yang tingginya tepat *h*-1. Karena itu, diperoleh persamaan sebagai berikut

$$C_{2h} = (1 + zS_k(T_{h-1}(z))) - (1 + zS_k(T_{h-2}(z))) - (T_{h-1}(z) - T_{h-2}(z))(T_{h-1}(z) - 1)$$

Tiga ekspresi dalam persamaan di atas masing-masing menghitung *k-tuple* pohon dengan tinggi maksimum *h*-1, *k-tuple* pohon dengan tinggi maksimum *h*-2, dan pohon dengan tepat satu sub pohon yang tingginya *h*-1.

Selanjutnya, misalkan C_n adalah jumlah *k-cayley trees* dengan *n* buah simpul, dan $C(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n$, maka

$$C(z) = \sum_{h \geq 0} C_{2h}(z)$$

Jika diuraikan, maka akan diperoleh *center* suatu pohon.

$$C(z) = C_0(z) + C_2(z) + C_4(z) + C_6(z) + \ldots.$$

Karena

$$C_{2h} = \left(1 + zS_k\left(T_{h-1}(z)\right)\right) - \left(1 + zS_k\left(T_{h-2}(z)\right)\right) - \left(T_{h-1}(z) - T_{h-2}(z)\right)\left(T_{h-1}(z) - 1\right)$$

Dan sudah tentukan bahwa $k = 4$ maka,

$$C_o(z) = \left(1 + zS_4(T_{-1}(z)))\right) - \left(1 + zS_4(T_{-2}(z)))\right) - \left(T_{-1}(z) - T_{-2}(z))(T_{-1}(z) - 1)\right)$$

$$C_2(z) = \left(1 + zS_4(T_0(z)))\right) - \left(1 + zS_4(T_{-1}(z)))\right) - \left(T_0(z) - T_{-1}(z))(T_0(z) - 1)\right)$$

$$C_4(z) = \left(1 + zS_4(T_1(z)))\right) - \left(1 + zS_4(T_0(z)))\right) - \left(T_1(z) - T_0(z))(T_1(z) - 1)\right)$$

$$C_6(z) = \left(1 + zS_4(T_2(z)))\right) - \left(1 + zS_4(T_1(z)))\right) - \left(T_2(z) - T_1(z))(T_2(z) - 1)\right)$$

$$C_8(z) = \left(1 + zS_4(T_3(z)))\right) - \left(1 + zS_4(T_2(z)))\right) - \left(T_3(z) - T_2(z))(T_3(z) - 1)\right)$$

$$C_{10}(z) = \left(1 + zS_4(T_4(z)))\right) - \left(1 + zS_4(T_3(z)))\right) - \left(T_4(z) - T_3(z))(T_4(z) - 1)\right)$$

Dan seterusnya....

1. $S_3(T_0(z))$

   Maka untuk $f(z) = T_0(z) = 1 + z$, maka

$$\begin{aligned}
S_3(T_0(z)) &= \frac{\left((1+z)^3 + 3(1+z)(1+z^2) + 2(1+z^3)\right)}{3!} \\
&= \frac{\left((1+3z+3z^2+z^3) + 3(1+z+z^2+z^3) + 2(1+z^3)\right)}{6} \\
&= \frac{1+3z+3z^2+z^3+3+3z+3z^2+3z^3+2+2z^3}{6} \\
&= \frac{6+6z+6z^2+6z^3}{6} \\
&= 1+z+z^2+z^3
\end{aligned}$$

2. $S_3(T_1(z))$

   Selanjutnya akan dihitung $T_1(z)$ dengan rumus

$$T_{h+1}(z) = 1 + zS_{k-1}(T_h(z))$$

yaitu,

$$T_1(z) = 1 + zS_3(T_0(z))$$

$$T_1(z) = 1 + zS_3(1+z)$$

$$T_1(z) = 1 + zS_3(f(z))\ .$$

dan diperoleh,

$$T_1(z) = 1 + z\left(1 + z + z^2 + z^3\right)$$

$$T_1(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$$

Diperoleh

$$S_3(T_1(z)) = \frac{\left((T_1(z))^3 + 3(T_1(z))(T_1(z^2)) + 2(T_1(z^3))\right)}{3!}$$

$$= 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 4z^5 + 5z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 3z^9 + 2z^{10} + z^{11} + z^{12}$$

3. $S_3(T_2(z))$

$$T_2(z) = 1 + zS_3(T_1(z))$$

$$T_2(z) = 1 + z(1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 4z^5 + 5z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 3z^9 + 2z^{10} + z^{11} + z^{12})$$

$$T_2(z) = 1 + z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13}$$

$$S_3(T_2(z)) = \frac{\left((T_2(z))^3 + 3(T_2(z))(T_2(z^2)) + 2(T_2(z^3))\right)}{3!}$$

$$\begin{aligned} = 1 &+ z + 300z^{14} + 128z^{30} + 70z^9 + 432z^{16} + 20z^6 + 31z^7 \\ &+ 624z^{21} + 37z^{33} + 99z^{10} + 7z^4 + 551z^{18} + 601z^{22} + 12z^5 \\ &+ 614z^{20} + 514z^{24} + 312z^{27} + 369z^{15} + 378z^{26} + 47z^8 \\ &+ 4z^3 + 594z^{19} + 498z^{17} + 238z^{28} + 137z^{11} + 184z^{12} \\ &+ 6z^{36} + z^{39} + 2z^2 + 570z^{23} + 453z^{25} + 181z^{29} + 89z^{31} \\ &+ 56z^{32} + 20z^{34} + 12z^{35} + 3z^{37} + z^{38} + 239z^{13} \end{aligned}$$

Dan seterusnya, untuk perhitungan $S_3\left(f(z)\right)$ dilanjutkan dengan program Maple yang telah dilampirkan.

4. $S_4\left(T_0(z)\right)$

Maka untuk $f(z) = T_0(z) = 1 + z$, maka

$$S_4\left(T_0(z)\right) = \frac{\left((1+z)^4 + 6\left(1+z^2\right)(1+z)^2 + 8\left(1+z^3\right)(1+z) + 3\left(1+z^2\right)^2 + 6\left(1+z^4\right)\right)}{4!}$$

$$= \frac{(\left(1+4z+6z^2+4z^3+z^4\right) + 6\left(1+z^2\right)\left(1+2z+z^2\right) + 8\left(1+z^3+z+z^4\right) +}{4!}$$

$$\frac{3\left(1+2z^2+z^4\right) + 6\left(1+z^4\right))}{4!}$$

$$= \frac{\left(1+4z+6z^2+4z^3+z^4\right) + \left(6+6z^2+12z+12z^3+6z^2+6z^4\right) +}{4!}$$

$$\frac{\left(8+8z^3+8z+8z^4\right) + \left(3+6z^2+3z^4\right) + \left(6+6z^4\right)}{4!}$$

$$= \frac{(1+6+8+3+6) + (4+12+8)z + (6+6+6+6)z^2 + (4+12+8)z^3}{24}$$

$$\frac{+(1+6+8+3+6)z^4}{24}$$

$$= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$$

5. $S_4\left(T_1(z)\right)$

Selanjutnya akan dihitung $T_1(z)$ dengan rumus

$$T_{h+1}(z) = 1 + zS_{k-1}\left(T_h(z)\right)$$

$$T_1(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$$

Dengan rekursi diperoleh

$$S_4\left(T_1(z)\right) = \frac{\left((T_1(z))^4 + 6\left(T_1\left(z^2\right)\right)(T_1(z))^2 + 8\left(T_1\left(z^3\right)\right)(T_1(z)) + 3\left(T_1\left(z^2\right)\right)^2 + 6\left(T_1\left(z^4\right)\right)\right)}{4!}$$

$$= 1 + z + 5z^{12} + 7z^9 + z^{16} + 7z^6 + 2z^2 + 5z^5 + 5z^4 + 8z^8 + 7z^{10} + 3z^{13} + 5z^{11} + 2z^{14} + z^{15} + 7z^7 + 3z^3$$

Dan seterusnya, untuk perhitungan $S_4(f(z))$ dilanjutkan dengan program Maple yang telah dilampirkan.

$$C_o(z) = \left(1 + zS_4(T_{-1}(z))\right) - \left(1 + zS_4(T_{-2}(z))\right) - \left(T_{-1}(z) - T_{-2}(z))(T_{-1}(z) - 1)\right)$$

$$C_o(z) = \left(1 + zS_4(1)\right) - \left(1 + zS_4(0)\right) - \left(1 - 0)(1 - 1)\right)$$

$$C_o(z) = z$$

Selanjutnya $C_2(z)$

$$C_2(z) = \left(1 + zS_4(T_0(z))\right) - \left(1 + zS_4(T_{-1}(z))\right) - \left(T_0(z) - T_{-1}(z))(T_0(z) - 1)\right)$$

$$C_2(z) = \left(1 + zS_4(1 + z)\right) - \left(1 + zS_4(0)\right) - \left((1 + z) - (0))((1 + z) - 1)\right)$$

$$C_2(z) = \left(1 + z(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)\right) - \left(1 + zS_4(0)\right) - \left((1 + z) - (0))((1 + z) - 1)\right)$$

$$C_2(z) = \left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)\right) - \left(1 + 0\right) - \left(1 + z)(z)\right)$$

$$C_2(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 - 1 - z - z^2$$

$$C_2(z) = z^3 + z^4 + z^5$$

Selanjutnya $C_4(z)$

$$C_4(z) = \left(1 + zS_4(T_1(z))\right) - \left(1 + zS_4(T_0(z))\right) - \left(T_1(z) - T_0(z))(T_1(z) - 1)\right)$$

$$\begin{aligned} C_4(z) &= \left(1 + zS_4(T_1(z))\right) - \left(1 + z(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)\right) - \\ &\quad \left((1 + z + z^2 + z^3 + z^4) - (1 + z))(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 - 1)\right) \\ &= (1 + z(1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 5z^5 + 7z^6 + 7z^7 + 8z^8 + 7z^9 + 7z^{10} + \\ &\quad 5z^{11} + 5z^{12} + 3z^{13} + 2z^{14} + z^{15} + z^{16})) - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5) - \\ &\quad (z^2 + z^3 + z^4)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 - 1) \\ &= z^5 + 2z^6 + 5z^7 + 6z^8 + 8z^9 + 7z^{10} + 7z^{11} + 5z^{12} + 5z^{13} + 3z^{14} + 2z^{15} \\ &\quad + z^{16} + z^{17} \end{aligned}$$

Selanjutnya C_6

$$C_6(z) = \left(1 + zS_4(T_2(z))\right) - \left(1 + zS_4(T_1(z))\right) - \left(T_2(z) - T_1(z))(T_2(z) - 1)\right)$$

$$\begin{aligned} C_6(z) = {} & z^{53} + 1581z^{38} + 5205z^{29} + 642z^{41} + 121z^{45} + 43z^{47} + 1306z^{18} \\ & + 436z^{42} + 70z^{46} + 5184z^{28} + 297z^{43} + 313z^{14} + 700z^{16} \\ & + z^{52} + 885z^{40} + 485z^{15} + 4031z^{33} + 4051z^{24} + 22z^{48} \\ & + 1211z^{39} + 5053z^{30} + 3598z^{23} + 3092z^{22} + 26z^{10} \\ & + 4823z^{31} + 2129z^{20} + 59z^{11} + 4814z^{26} + 4451z^{32} + 3z^{51} \\ & + 3523z^{34} + 109z^{12} + 4487z^{25} + 2031z^{37} + 2611z^{21} \\ & + 3027z^{35} + z^{7} + 982z^{17} + 5073z^{27} + 2498z^{36} + 3z^{8} \\ & + 1703z^{19} + 6z^{50} + 196z^{13} + 11z^{9} + 189z^{44} + 13z^{49} \end{aligned}$$

Dan seterusnya, untuk perhitungan $C_n(z)$ dilanjutkan dengan program Maple yang telah dilampirkan

$$C(z) = \sum_{h\geq 0} C_{2h}(z) = C_0(z) + C_2(z) + C_4(z) + C_6(z) + \ldots.$$

Untuk memperoleh nilai *Centered* maka akan dilakukan penjumlahan terhadap $C(z)$ yang telah dihitung, pada contoh perhitungan di atas akan dilakukan operasi penjumlahan terhadap $C_0(z)$, $C_2(z)$, $C_4(z)$, $C_6(z)$, $C_8(z)$. Yaitu

$$C(z) = C_0(z) + C_2(z) + C_4(z) + C_6(z) + C_8(z)$$

$$= z + z^3 + z^4 + 2z^5 + 2z^6 + 6z^7 + 9z^8 + 20z^9 + 37z^{10} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. *Bicentered Tree* $B(z)$

Misalkan $B_{2h+1,n}$ adalah jumlah pohon *bicenter* dari *k-Cayley trees* dengan n adalah jumlah simpul dan $2h$+1 adalah diameter pohon.

Ambil $B_{2h+1}(z) = \sum_{n\geq 0} B_{2h+1,n} z^n$,

B_n adalah jumlah *bicenter* dari *k-Cayley trees* yang memiliki n simpul, dan $B(z) = \sum_{n\geq 0} B_n z^n$. Karena sebuah pohon *bicenter* berkorespondensi dengan pasangan pohon berakar (k-1)-*ary* dengan tinggi tepat h diperoleh

$$B_{2h-1}(z) = S_2\left(T_h(z) - T_{h-1}(z)\right)$$

Maka diperoleh *Bicenter* suatu pohon adalah

$$B(z) = \sum_{h\geq 0} B_{2h+1}(z)$$

Jika diuraiakan diperoleh sebagai berikut

$$B(z) = B_1(z) + B_3(z) + B_5(z) + B_7(z) + B_9(z) + \ldots$$

$B_1(z) = S_2\left(T_0(z) - T_{-1}(z)\right)$

$B_3(z) = S_2\left(T_1(z) - T_0(z)\right)$

$B_5(z) = S_2\left(T_2(z) - T_1(z)\right)$

$B_7(z) = S_2\left(T_3(z) - T_2(z)\right)$

$B_9(z) = S_2\left(T_4(z) - T_3(z)\right)$

dan seterusnya...

Untuk mengitung *Bicentere* maka digunakan *cycle index* untuk grup simetri berorder m=2

$$S_2 f(z) = \frac{f(z)^2 + f(z^2)}{2!}.$$

Seperti perhitungan sebelumnya, pada *center* telah diperoleh

$T_{-1}(z) = 1$

$T_0(z) = 1 + z$

$T_1(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$

$T_2(z) = 1 + z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13}$

$$\begin{aligned} T_3(z) = {} & 1 + z + 239z^{14} + 181z^{30} + 47z^9 + 369z^{16} + 12z^6 + 20z^7 \\ & + 614z^{21} + 56z^{33} + 70z^{10} + 4z^4 + 498z^{18} + 624z^{22} + 7z^5 \\ & + 594z^{20} + 570z^{24} + 378z^{27} + 300z^{15} + 453z^{26} + 31z^8 \\ & + 2z^3 + 551z^{19} + 432z^{17} + 312z^{28} + 99z^{11} + 137z^{12} \\ & + 12z^{36} + z^{39} + z^2 + 601z^{23} + 514z^{25} + 238z^{29} + 128z^{31} \\ & + 89z^{32} + 37z^{34} + 20z^{35} + 6z^{37} + 3z^{38} + 184z^{13} + z^{40} \end{aligned}$$

Dan seterusnya...

1. Maka akan dihitung untuk $B_1(z) = S_2(T_0(z) - T_{-1}(z))$

   $(T_0(z) - T_{-1}(z)) = 1 + z - 1 = z$

   Karena $(T_0(z) - T_{-1}(z)) = f(z) = z$, maka

   $$B_1(z) = \frac{(z)^2 + (z^2)}{2!}$$

   $$= z^2$$

2. $B_3(z) = S_2(T_1(z) - T_0(z))$

   $(T_1(z) - T_0(z)) = (1 + z + z^2 + z^3 + z^4) - (1 + z) = z^2 + z^3 + z^4$

   Karena $(T_1(z) - T_0(z)) = f(z) = z^2 + z^3 + z^4$, maka

$$B_3(z) = \frac{\left(z^2 + z^3 + z^4\right)^2 + \left(z^4 + z^6 + z^8\right)}{2!}$$

$$= z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + z^8$$

3. $B_5(z) = S_2\left(T_2(z) - T_1(z)\right)$

$$\left(T_2(z) - T_1(z)\right) = (1 + z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10}$$
$$+ 2z^{11} + z^{12} + z^{13}) - (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$
$$= z^3 + 2z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13}$$

Karena $\left(T_2(z) - T_1(z)\right) = f(z) =$

$z^3 + 2z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13}$, maka

$$B_5(z) = \frac{1}{2!}(\left(z^3 + 2z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13}\right)^2 +$$
$$\left(z^6 + 2z^8 + 4z^{10} + 4z^{12} + 5z^{14} + 4z^{16} + 4z^{18} + 3z^{20} + 2z^{22} + z^{24} + z^{16}\right))$$
$$=$$

$$12z^9 + 29z^{19} + 23z^{10} + 3z^{24} + 53z^{16} + 14z^{21} + 5z^{23} + 40z^{18}$$
$$+ 30z^{11} + 55z^{14} + z^6 + z^{25} + z^{26} + 2z^7 + 7z^8 + 23z^{20}$$
$$+ 10z^{22} + 47z^{13} + 42z^{12} + 53z^{15} + 45z^{17}$$

Dan seterusnya, untuk perhitungan $B_n(z)$ dilanjutkan dengan program Maple yang telah dilampirkan

$$B(z) = \sum_{h \geq 0} B_{2h+1}(z) = B_1(z) + B_3(z) + B_5(z) + B_7(z) + B_9(z) + \ldots$$

Untuk memperoleh nilai *Bicentered* maka akan dilakukan penjumlahan terhadap $B(z)$ yang telah dihitung, pada contoh perhitungan di atas akan dilakukan operasi penjumlahan terhadap $B_1(z)$, $B_3(z)$, $B_5(z)$, $B_7(z)$,. Yaitu

$B(z) = C_1(z) + C_3(z) + C_5(z) + C_7(z)$

$$= z^2 + z^4 + z^5 + 3z^6 + 3z^7 + 9z^8 + 15z^9 + 38z^{10} + 73z^{11} + \ldots\ldots\ldots.$$

Dari dua jenis perhitungan di atas, yaitu antara *Centered* dan *Bicentered*, maka dapat diperoleh kesimpulan hasil pehitungannya, yaitu:

Tabel 3.2 Tabel Banyak Graf Isomorfik

yang Ditentukan Melalui Konsep *Cayley Tree*

n	*Centered*	*Bicentered*	Total
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	2
5	2	1	3
6	2	3	5
7	6	3	9
8	9	9	18
9	20	15	35
10	37	38	75
...	...	...	...

Total pada **Tabel 3.2** menyatakan banyak graf isomorfik yang ditentukan melalui penjumlahan antara *Centered* dan *Bicentered*.

B. Aplikasi Teori Graf dalam Menentukan Banyak Isomer Senyawa Alkana

Isomer adalah senyawa yang mempunyai rumus molekul sama tetapi memiliki struktur berbeda. Dalam teori graf, isomer sebetulnya sama dengan graf isomorfik hanya saja sifat-sifat dalam kimia diabaikan. Karena dalam teori graf lebih membahas ke strukturnya saja, sehingga mempermudah dalam menghitung banyak isomer senyawa alkana.

Senyawa-senyawa kimia khususnya alkana tidak mudah digambarkan atau dimodelkan. Diperlukan suatu aturan khusus dalam pemodelan senyawa kimia ini. Graf dengan berbagai teorinya sangat cocok untuk memodelkan senyawa kimia tersebut. Dalam kimia, komponen kimia dengan formula C_nH_{2n+2} di sebut dengan alkana. Senyawa C_nH_{2n+2} mengandung *n* atom karbon dan 2*n*+2 atom hidrogen.

Sesuai dengan keperluannya dalam teori graf, banyak kosakata dari kamus kimia yang diubah menjadi kosakata dalam graf dengan tujuan pemahaman.

Tabel 3.3 Tabel Istilah

Istilah Kimia	Istilah dalam Teori Graf
Structural formula (rumus struktur)	*Graph* (graf)
Atom	*Vertex* (simpul)
Chemical Bond (ikatan kimia)	*Edge* (sisi)
Valency of atom (atom valensi)	*Degree of vertex* (derajat simpul)
Acyclic structure	*Tree* (pohon)

Isomer	isomorfik

Berdasarkan Teorema 2.2, akan dibuktikan bahwa senyawa alkana C_nH_{2n+2} adalah suatu pohon.

Teorema 3.1 (Cayley)

Struktur senyawa alkana C_nH_{2n+2} merupakan suatu pohon.

Bukti:

Banyaknya simpul dari C_nH_{2n+2} adalah $n+(2n+2)=3n+2$

Alkana adalah molekul yang setiap atom Carbon mempunyai 4 pengikat, sedangkan setiap atom Hidrogen hanya 1 pengikat. Andaikan G adalah graf sebagai model dari Alkana tersebut, maka G memiliki $3n$+2 simpul. Selanjutnya ditunjukkan bahwa banyaknya rusuk di G adalah $3n$+1.

$$
\begin{aligned}
V(G) &= 3n+2 \\
E(G) &= \frac{1}{2}\sum_{v_i \in V(G)} d(V_i) \\
&= \frac{1}{2}\big(d(C)+d(H)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(n.4+(2n+2).1\big) \\
&= (4n+2n+2)/2 \\
&= 3n+1
\end{aligned}
$$

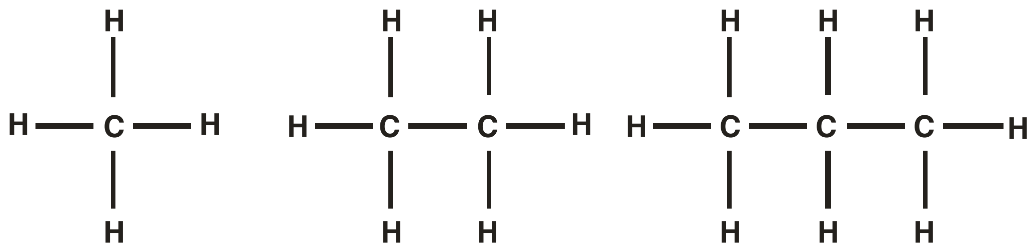
(terbukti)

Oleh karena itu $E(G)=V(G)-1$ maka struktur senyawa alkana C_nH_{2n+2} merupakan suatu pohon.

Bentuk struktur dari susunan kimia adalah sebuah diagram yang menyatakan ikatan antara atom-atom dalam molekul. Rumus molekul C_nH_{2n+2}

tidak cukup untuk mengidentifikasi isomer, selama ada isomer yang mempunyai rumus molekul yang sama tetapi berbeda strukturnya. Oleh karena itu perlu adanya penggambaran struktur yang dimaksud.

Tiga bentuk pertama dari alkana dapat disajikan pada **Gambar 3.3** sebagai berikut.



CH_4 | C_2H_6 | C_3H_8

Metana | **Etana** | **Propana**

Gambar 3.3

Ketiga jenis alkana di atas hanya memiliki satu buah isomer. Untuk n>4 dapat diperoleh lebih dari satu isomer C_nH_{2n+2} .

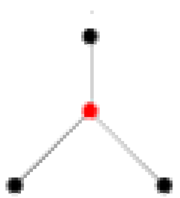
Gambar 3.4 merupakan isomer dari Butana dan Pentana bila ditentukan melalui metode *Draw and Count Method,* di mana Butana memiliki dua buah isomer dan Pentana memiliki tiga buah isomer. Perhitungan isomer akan sangat mudah dilakukan bila n kecil, tetapi hal itu sangat susah dilakukan apabila n besar, karena akan membutuhkan waktu yang lama, bahkan kemungkinan melakukan kesalahan besar. Oleh karena itu, pada Bab ini dilakukan perhitungan melalui matematika yaitu menggunakan *Cayley Tree*.

Menurut **Teorema 3.1** telah dibuktikan bahwa suatu senyawa alkana merupakan sebuah pohon jika dipandang dari segi matematis. Oleh karena itu, untuk lebih jelasnya bagaimana graf itu sangat penting dalam kimia teoritis khususnya dalam menentukan banyaknya isomer senyawa alkana, di bawah ini akan disajikan representasi graf dalam perhitungan senyawa alkana yang tentunya menggunakan konsep *Centered Tree* dan *Bicentered Tree*. Representasi graf akan disajikan pada **Gambar 3.4** yaitu pada senyawa Butana (C_4H_{10}) dan senyawa Pentana (C_5H_{12})

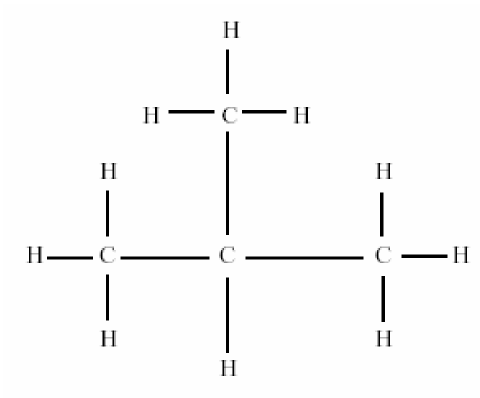
Gambar 3.4

Pada senyawa Butana (C_4H_{10})

Centered Jika disajikan dalam bentuk graf

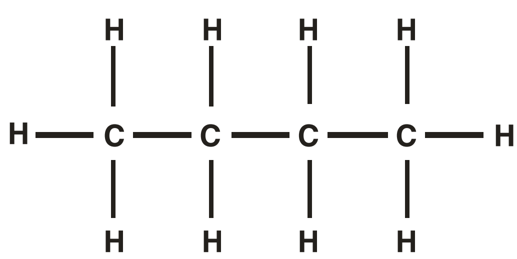


→



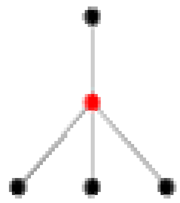
Bicentered Jika disajikan dalam bentuk graf

→

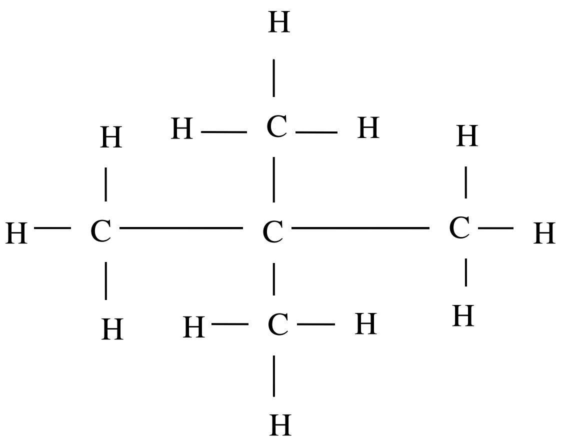


Pada senyawa Pentana (C_5H_{12})

Centered Jika disajikan dalam bentuk graf

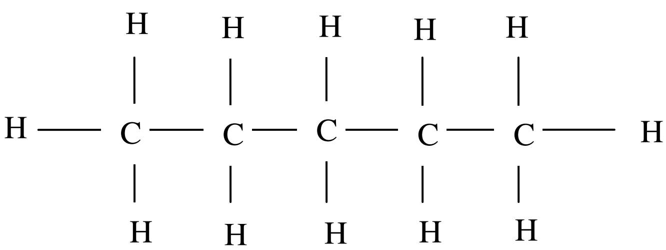


→

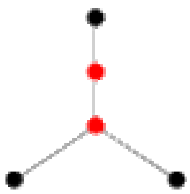


Centered Jika disajikan dalam bentuk graf

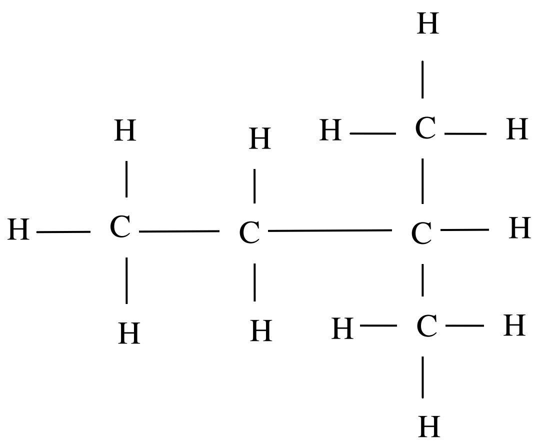
→



Bicentered Jika disajikan dalam bentuk graf



→



Representasi graf pada senyawa Butana$\left(C_4H_{10}\right)$ dan senyawa Pentana $\left(C_5H_{12}\right)$ melalui konsep *Centered* dan *Bicentered* pada **Gambar 3.4** menunjukkan adanya keterkaitan antara teori graf dan kimia. Melalui konsep teori graf yaitu *Cayley Tree* dapat mempermudah dalam menghitung banyak isomer senyawa alkana. Oleh karena itu banyak isomer senyawa alkana dapat dilihat hasilnya pada **Tabel 3.2**, karena dalam menentukan banyak isomer senyawa alkana sebenarnya sama halnya dalam menentukan banyak graf isomorfik yang dapat dibentuk dari sebuah rumus molekul dari alkana yaitu C_nH_{2n+2}.

BAB IV

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Struktur senyawa kimia khususnya alkana dengan rumus kimia C_nH_{2n+2} merupakan graf pohon, karena memenuhi $E(G) = V(G) - 1$. Alkana adalah hidrokarbon asiklik di mana setiap simpulnya mempunyai serajat satu atau empat, sehingga pada pembahasannya menggunakan konsep 4-*Cayley Tree*.
2. Jumlah isomer senyawa alkana ditentukan berdasarkan jumlahan antara *Centered Tree* dan *Bicentered Tree*. Yaitu sebagai berikut:

n	***Centered***	***Bicentered***	**Total**
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	2
5	2	1	3
6	2	3	5
7	6	3	9
8	9	9	18
9	20	15	35

10	37	38	75
...	...	...	...

B. SARAN

Dalam skripsi ini penulis hanya membahas aplikasi *Cayley Tree* dalam menentukan isomer senyawa alkana. Bagi pembaca yang ingin menyelesaikan tugas akhir skripsi dan tertarik diperkuliahan Teori Graf serta aplikasinya pada ilmu kimia, topik mengenai perhitungan jumlah isomer dengan metode kombinatorial yang melibatkan perhitungan permutasi dan kombinasi dapat dijadikan sebagai bahan penulisan tugas skripsi selanjutnya. Dengan adanya kelanjutan penulisan ini akan menambah wawasan dan literatur bagi pembaca yang mendalami ilmu teori graf dan aplikasinya dalam ilmu kimia.

DAFTAR PUSTAKA

Amir Muntaha. 2008. *Graf Pohon dan Implementasinya dalam Beberapa Persoalan*. http://www.ccs.neu.edu/home/fell/CSU200/Lectures/Trees.pdf. Tanggal Akses: 30 April 2008.

Chartrand, Gary. 1985. *Introductory Graph Theory*. Canada: Courier Dover Publications.

Daintith, John. 1999. *The Facts on File Dictionary of Chemistry*. New York NY 10001: Market House Book Ltd.

De Koninck, J M & Mercier, Armel. 2007. *Problems In Classical Number Theory*. Arizona: American Mathematical Society.

Fraleigh, John B. 1998. *A First Course In Abstract Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Goodaire, Edgar G & Parmenter, Michael M. 2006. *Discrete Mathematics with Graph Theory*. United States of America: Pearson Prentice Hall.

Grimaldi, Ralph P. 1999. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. United States of America: Addison Wesley Longman, Inc.

Groos, Jonathan L & Yellen, Jay. 2005. *Graph Theory and Its Applications*. New York: Chapman & Hall CRC.

Heri Sutarno. 2005. *Matematika Diskret*. Malang: Universitas Negeri Malang (UM PRESS).

Kristian H Sugiyarto. 2006. *Dasar-dasar Kimia Anorganik Transisi*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Mulyono HAM. 2006. *Kamus Kimia*. Bumi Aksara: Jakarta.

Rains E. M. & Sloane N. J. A. 2008. *On Cayley's Enumeration of Alkanes (or 4-Valent Trees)*. Journal of Integer Sequences: In formation Sciences Research AT & T Shannon Lab Florham Park.

Reisha Humaria. 2007. *Beberapa Aplikasi Graf dan Kombinatorial untuk Menentukan Jumlah Isomer Senyawa Kimia*. http://.informatika.org/~rinaldi/Matdis/2006-2007/Makalah/Makalah0607-15. Tanggal akses: 26 November 2007.

Trinajstic, Nenad. 1993. *Chemical Graph Theory*. London: CRC Press.

Weisstein, Eric W. 2008. *Group Generator*. http://mathworld.wolfram.com/GroupGenerators.html. Tanggal akses: 27 Mei 2008.

Wikipedia. 2008. *Cayley Graph*. http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley_graph. Tanggal akses: 01 April 2008.

Wilson, R. J. & Watkins J.J. 1990. *Graphs an Introductory Approach*. Toronto: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

> **Perhitungan *Centered Tree***

> **1. menghitung *Cycle Index* untuk grup simetri berorder m = 3**

> $T0(z) := 1 + z$

$$T0 := z \rightarrow 1 + z \quad \textbf{(1)}$$

> $T0(z^2) := expand(T0(z^2));$

$$T0(z^2) := 1 + z^2 \quad \textbf{(2)}$$

> $T0(z^3) := expand(T0(z^3));$

$$T0(z^3) := 1 + z^3 \quad \textbf{(3)}$$

> $S3T0(z) := expand\left(\frac{((T0(z))^3 + 3\cdot(T0(z))\cdot(T0(z^2)) + 2\cdot(T0(z^3)))}{6}\right);$

$$S3T0(z) := 1 + z^2 + z + z^3 \quad \textbf{(4)}$$

> $T1(z) := expand(1 + z\cdot(S3T0(z)));$

$$T1(z) := 1 + z + z^3 + z^2 + z^4 \quad \textbf{(5)}$$

> $T1(z) := 1 + z + z^3 + z^2 + z^4$

$$T1 := z \rightarrow 1 + z + z^3 + z^2 + z^4 \quad \textbf{(6)}$$

> $T1(z^2) := expand(T1(z^2));$

$$T1(z^2) := 1 + z^2 + z^6 + z^4 + z^8 \quad \textbf{(7)}$$

> $T1(z^3) := expand(T1(z^3));$

$$T1(z^3) := 1 + z^3 + z^9 + z^6 + z^{12} \quad \textbf{(8)}$$

> $S3T1(z) := expand\left(\frac{((T1(z))^3 + 3\cdot(T1(z))\cdot(T1(z^2)) + 2\cdot(T1(z^3)))}{6}\right);$

$$S3T1(z) := 1 + z + 4z^4 + 2z^2 + 3z^3 + z^{11} + 3z^9 + z^{12} + 4z^8 + 5z^6 + 4z^5 + 4z^7 + 2z^{10} \quad \textbf{(9)}$$

> $T2(z) := expand(1 + z\cdot(S3T1(z)));$

$$T2(z) := 1 + z + z^2 + 4z^5 + 2z^3 + 3z^4 + z^{12} + 3z^{10} + z^{13} + 4z^9 + 5z^7 + 4z^6 + 4z^8 + 2z^{11} \quad \textbf{(10)}$$

> $T2(z) := 1 + z + z^2 + 4z^5 + 2z^3 + 3z^4 + z^{12} + 3z^{10} + z^{13} + 4z^9 + 5z^7 + 4z^6 + 4z^8 + 2z^{11}$

$$T2 := z \rightarrow 1 + z + z^2 + 4z^5 + 2z^3 + 3z^4 + z^{12} + 3z^{10} + z^{13} + 4z^9 + 5z^7 + 4z^6 + 4z^8 + 2z^{11} \quad \textbf{(11)}$$

> $T2(z^2) := expand(T2(z^2));$

$$T2(z^2) := 1 + z^2 + z^4 + 4z^{10} + 2z^6 + 3z^8 + z^{24} + 3z^{20} + z^{26} + 4z^{18} + 5z^{14} + 4z^{12} + 4z^{16} + 2z^{22} \quad \textbf{(12)}$$

> $T2(z^3) := expand(T2(z^3));$

$$T2(z^3) := 1 + z^3 + z^6 + 4z^{15} + 2z^9 + 3z^{12} + z^{36} + 3z^{30} + z^{39} + 4z^{27} + 5z^{21} + 4z^{18} + 4z^{24} + 2z^{33} \quad \textbf{(13)}$$

> $S3T2(z) := expand\left(\frac{((T2(z))^3 + 3\cdot(T2(z))\cdot(T2(z^2)) + 2\cdot(T2(z^3)))}{6}\right);$

$$S3T2(z) := 1 + z + 239z^{13} + 498z^{17} + 570z^{23} + 594z^{19} + 453z^{25} + 238z^{28} + 12z^{35} + 3z^{37} + 89z^{31} + 181z^{29} + 20z^{34} + z^{38} + 56z^{32} + 7z^4 + 2z^2 + 4z^3 + 137z^{11} + 514z^{24} \quad \textbf{(14)}$$

$+ 614 z^{20} + 378 z^{26} + 551 z^{18} + 300 z^{14} + 432 z^{16} + 601 z^{22} + 70 z^{9} + 184 z^{12} + 37 z^{33} + 369 z^{15} + 6 z^{36} + 128 z^{30} + z^{39} + 312 z^{27} + 624 z^{21} + 47 z^{8} + 20 z^{6} + 12 z^{5} + 31 z^{7} + 99 z^{10}$

> $T3(z) := expand(1 + z\cdot(S3T2(z)));$

$$T3(z) := 1 + z + 184 z^{13} + 432 z^{17} + 601 z^{23} + 551 z^{19} + 514 z^{25} + 312 z^{28} + 20 z^{35} + 6 z^{37} + 128 z^{31} + 238 z^{29} + 37 z^{34} + 3 z^{38} + 89 z^{32} + 4 z^{4} + z^{2} + 2 z^{3} + 99 z^{11} + 570 z^{24} + 594 z^{20} + 453 z^{26} + 498 z^{18} + 239 z^{14} + 369 z^{16} + 624 z^{22} + z^{40} + 47 z^{9} + 137 z^{12} + 56 z^{33} + 300 z^{15} + 12 z^{36} + 181 z^{30} + z^{39} + 378 z^{27} + 614 z^{21} + 31 z^{8} + 12 z^{6} + 7 z^{5} + 20 z^{7} + 70 z^{10} \quad \textbf{(15)}$$

> $T3(z) := 1 + z + 184 z^{13} + 432 z^{17} + 601 z^{23} + 551 z^{19} + 514 z^{25} + 312 z^{28} + 20 z^{35} + 6 z^{37} + 128 z^{31} + 238 z^{29} + 37 z^{34} + 3 z^{38} + 89 z^{32} + 4 z^{4} + z^{2} + 2 z^{3} + 99 z^{11} + 570 z^{24} + 594 z^{20} + 453 z^{26} + 498 z^{18} + 239 z^{14} + 369 z^{16} + 624 z^{22} + z^{40} + 47 z^{9} + 137 z^{12} + 56 z^{33} + 300 z^{15} + 12 z^{36} + 181 z^{30} + z^{39} + 378 z^{27} + 614 z^{21} + 31 z^{8} + 12 z^{6} + 7 z^{5} + 20 z^{7} + 70 z^{10}$

$$T3 := z \rightarrow 1 + z + z^{40} + z^{39} + z^{2} + 2 z^{3} + 4 z^{4} + 137 z^{12} + 184 z^{13} + 432 z^{17} + 601 z^{23} + 551 z^{19} + 514 z^{25} + 312 z^{28} + 20 z^{35} + 6 z^{37} + 128 z^{31} + 238 z^{29} + 37 z^{34} + 3 z^{38} + 89 z^{32} + 570 z^{24} + 594 z^{20} + 453 z^{26} + 498 z^{18} + 239 z^{14} + 369 z^{16} + 624 z^{22} + 56 z^{33} + 300 z^{15} + 12 z^{36} + 181 z^{30} + 378 z^{27} + 614 z^{21} + 7 z^{5} + 70 z^{10} + 47 z^{9} + 20 z^{7} + 12 z^{6} + 31 z^{8} + 99 z^{11} \quad \textbf{(16)}$$

> $T3(z^2) := expand(T3(z^2));$

$$T3(z^2) := 1 + 239 z^{28} + 432 z^{34} + 551 z^{38} + 369 z^{32} + z^{4} + z^{2} + 624 z^{44} + 56 z^{66} + 614 z^{42} + 12 z^{72} + 181 z^{60} + 378 z^{54} + 137 z^{24} + 70 z^{20} + 184 z^{26} + 47 z^{18} + 20 z^{14} + 31 z^{16} + 99 z^{22} + 594 z^{40} + 12 z^{12} + 498 z^{36} + 300 z^{30} + 4 z^{8} + 2 z^{6} + 7 z^{10} + z^{80} + z^{78} + 601 z^{46} + 514 z^{50} + 312 z^{56} + 20 z^{70} + 6 z^{74} + 128 z^{62} + 238 z^{58} + 37 z^{68} + 3 z^{76} + 89 z^{64} + 570 z^{48} + 453 z^{52} \quad \textbf{(17)}$$

> $T3(z^3) := expand(T3(z^3));$

$$T3(z^3) := 1 + 624 z^{66} + 239 z^{42} + 570 z^{72} + 594 z^{60} + 498 z^{54} + 181 z^{90} + 378 z^{81} + 614 z^{63} + z^{3} + 31 z^{24} + 12 z^{18} + z^{120} + z^{117} + 432 z^{51} + 601 z^{69} + 551 z^{57} + 514 z^{75} + 312 z^{84} + 20 z^{105} + 6 z^{111} + 128 z^{93} + 238 z^{87} + 37 z^{102} + 3 z^{114} + 89 z^{96} + 2 z^{9} + 4 z^{12} + 99 z^{33} + 7 z^{15} + 137 z^{36} + 70 z^{30} + 184 z^{39} + 47 z^{27} + 20 z^{21} + z^{6} + 56 z^{99} + 300 z^{45} + 12 z^{108} + 453 z^{78} + 369 z^{48} \quad \textbf{(18)}$$

> $S3T3(z) := expand\left(\frac{((T3(z))^3 + 3\cdot(T3(z))\cdot(T3(z^2)) + 2\cdot(T3(z^3)))}{6}\right);$

$$S3T3(z) := 1 + z + 2365 z^{13} + 20354 z^{17} + 364555 z^{23} + 55706 z^{19} + 872727 z^{25} + 2980554 z^{28} + 36095102 z^{35} + 66951451 z^{37} + 9246830 z^{31} + 4393287 z^{29} + 26088244 z^{34} + 89755449 z^{38} + 13204526 z^{32} + 8 z^{4} + 758 z^{112} + 338 z^{113} + 62 z^{115} + 27 z^{116} + 4 z^{118} + z^{119} + 1710204982 z^{77} + 1235964517 z^{79} + 202984042 z^{41} + 331715843 z^{43} \quad \textbf{(19)}$$

$+ 779843029 z^{47} + 1121537006 z^{49} + 2038928979 z^{53} + 2576241555 z^{55}$
$+ 3606730433 z^{59} + 3993437445 z^{61} + 4277663720 z^{65} + 4134086103 z^{67}$
$+ 3356383912 z^{71} + 2815570112 z^{73} + 2 z^{2} + 417359802 z^{44} + 4229607116 z^{66}$
$+ 260865858 z^{42} + 3092740855 z^{72} + 3816383212 z^{60} + 2304400735 z^{54} + 79298004 z^{90}$
$+ 848181768 z^{81} + 4227813312 z^{63} + 4 z^{3} + 749 z^{11} + 567206 z^{24} + 90628 z^{20}$
$+ 1328545 z^{26} + 33883 z^{18} + 4129 z^{14} + 12104 z^{16} + 231801 z^{22} + 156284730 z^{40} + z^{120}$
$+ 10 z^{117} + 1545167948 z^{51} + 3813878148 z^{69} + 3116054839 z^{57} + 2249523074 z^{75}$
$+ 436439448 z^{84} + 88204 z^{105} + 1604 z^{111} + 27675367 z^{93} + 198431393 z^{87} + 479339 z^{102}$
$+ 154 z^{114} + 8372800 z^{96} + 225 z^{9} + 1344 z^{12} + 18657905 z^{33} + 7106 z^{15} + 49418998 z^{36}$
$+ 6407683 z^{30} + 119063149 z^{39} + 2000536 z^{27} + 145729 z^{21} + 121 z^{8} + 33 z^{6}$
$+ 2174395 z^{99} + 519559381 z^{45} + 13348 z^{108} + 16 z^{5} + 63 z^{7} + 415 z^{10} + 109250394 z^{89}$
$+ 56695196 z^{91} + 39922778 z^{92} + 18885015 z^{94} + 12677964 z^{95} + 5435626 z^{97}$
$+ 3469135 z^{98} + 1338790 z^{100} + 808547 z^{101} + 278280 z^{103} + 158476 z^{104} + 48126 z^{106}$
$+ 25584 z^{107} + 6744 z^{109} + 3353 z^{110} + 688882553 z^{82} + 552046535 z^{83} + 340324807 z^{85}$
$+ 261713408 z^{86} + 148315264 z^{88} + 1030602778 z^{80} + 1463215476 z^{78} + 639939517 z^{46}$
$+ 1323523938 z^{50} + 2848892771 z^{56} + 3599155257 z^{70} + 2532213546 z^{74}$
$+ 4132169661 z^{62} + 3371001341 z^{58} + 3994067586 z^{68} + 1973755292 z^{76}$
$+ 4276971739 z^{64} + 940236752 z^{48} + 1784589063 z^{52}$

> $T4(z) := expand(1 + z\cdot(S3T3(z)));$

$T4(z) := 1 + z + z^{121} + 1344 z^{13} + 12104 z^{17} + 231801 z^{23} + 33883 z^{19} + 567206 z^{25}$ **(20)**
$+ 2000536 z^{28} + 26088244 z^{35} + 49418998 z^{37} + 6407683 z^{31} + 2980554 z^{29}$
$+ 18657905 z^{34} + 66951451 z^{38} + 9246830 z^{32} + 4 z^{4} + 1604 z^{112} + 758 z^{113} + 154 z^{115}$
$+ 62 z^{116} + 10 z^{118} + 4 z^{119} + 1973755292 z^{77} + 1463215476 z^{79} + 156284730 z^{41}$
$+ 260865858 z^{43} + 639939517 z^{47} + 940236752 z^{49} + 1784589063 z^{53} + 2304400735 z^{55}$
$+ 3371001341 z^{59} + 3816383212 z^{61} + 4276971739 z^{65} + 4229607116 z^{67}$
$+ 3599155257 z^{71} + 3092740855 z^{73} + z^{2} + 331715843 z^{44} + 4277663720 z^{66}$
$+ 202984042 z^{42} + 3356383912 z^{72} + 3606730433 z^{60} + 2038928979 z^{54} + 109250394 z^{90}$
$+ 1030602778 z^{81} + 4132169661 z^{63} + 2 z^{3} + 415 z^{11} + 364555 z^{24} + 55706 z^{20}$
$+ 872727 z^{26} + 20354 z^{18} + 2365 z^{14} + 7106 z^{16} + 145729 z^{22} + 119063149 z^{40} + z^{120}$
$+ 27 z^{117} + 1323523938 z^{51} + 3994067586 z^{69} + 2848892771 z^{57} + 2532213546 z^{75}$
$+ 552046535 z^{84} + 158476 z^{105} + 3353 z^{111} + 39922778 z^{93} + 261713408 z^{87}$
$+ 808547 z^{102} + 338 z^{114} + 12677964 z^{96} + 121 z^{9} + 749 z^{12} + 13204526 z^{33} + 4129 z^{15}$
$+ 36095102 z^{36} + 4393287 z^{30} + 89755449 z^{39} + 1328545 z^{27} + 90628 z^{21} + 63 z^{8} + 16 z^{6}$
$+ 3469135 z^{99} + 417359802 z^{45} + 25584 z^{108} + 8 z^{5} + 33 z^{7} + 225 z^{10} + 148315264 z^{89}$
$+ 79298004 z^{91} + 56695196 z^{92} + 27675367 z^{94} + 18885015 z^{95} + 8372800 z^{97}$
$+ 5435626 z^{98} + 2174395 z^{100} + 1338790 z^{101} + 479339 z^{103} + 278280 z^{104} + 88204 z^{106}$

$$
\begin{aligned}
&+ 48126\, z^{107} + 13348\, z^{109} + 6744\, z^{110} + 848181768\, z^{82} + 688882553\, z^{83} + 436439448\, z^{85} \\
&+ 340324807\, z^{86} + 198431393\, z^{88} + 1235964517\, z^{80} + 1710204982\, z^{78} + 519559381\, z^{46} \\
&+ 1121537006\, z^{50} + 2576241555\, z^{56} + 3813878148\, z^{70} + 2815570112\, z^{74} \\
&+ 3993437445\, z^{62} + 3116054839\, z^{58} + 4134086103\, z^{68} + 2249523074\, z^{76} \\
&+ 4227813312\, z^{64} + 779843029\, z^{48} + 1545167948\, z^{52}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
> \; T4(z) := {} & 1 + z + z^{121} + 1344\, z^{13} + 12104\, z^{17} + 231801\, z^{23} + 33883\, z^{19} + 567206\, z^{25} \\
&+ 2000536\, z^{28} + 26088244\, z^{35} + 49418998\, z^{37} + 6407683\, z^{31} + 2980554\, z^{29} \\
&+ 18657905\, z^{34} + 66951451\, z^{38} + 9246830\, z^{32} + 4\, z^{4} + 1604\, z^{112} + 758\, z^{113} + 154\, z^{115} \\
&+ 62\, z^{116} + 10\, z^{118} + 4\, z^{119} + 1973755292\, z^{77} + 1463215476\, z^{79} + 156284730\, z^{41} \\
&+ 260865858\, z^{43} + 639939517\, z^{47} + 940236752\, z^{49} + 1784589063\, z^{53} + 2304400735\, z^{55} \\
&+ 3371001341\, z^{59} + 3816383212\, z^{61} + 4276971739\, z^{65} + 4229607116\, z^{67} \\
&+ 3599155257\, z^{71} + 3092740855\, z^{73} + z^{2} + 331715843\, z^{44} + 4277663720\, z^{66} \\
&+ 202984042\, z^{42} + 3356383912\, z^{72} + 3606730433\, z^{60} + 2038928979\, z^{54} \\
&+ 109250394\, z^{90} + 1030602778\, z^{81} + 4132169661\, z^{63} + 2\, z^{3} + 415\, z^{11} + 364555\, z^{24} \\
&+ 55706\, z^{20} + 872727\, z^{26} + 20354\, z^{18} + 2365\, z^{14} + 7106\, z^{16} + 145729\, z^{22} \\
&+ 119063149\, z^{40} + z^{120} + 27\, z^{117} + 1323523938\, z^{51} + 3994067586\, z^{69} + 2848892771\, z^{57} \\
&+ 2532213546\, z^{75} + 552046535\, z^{84} + 158476\, z^{105} + 3353\, z^{111} + 39922778\, z^{93} \\
&+ 261713408\, z^{87} + 808547\, z^{102} + 338\, z^{114} + 12677964\, z^{96} + 121\, z^{9} + 749\, z^{12} \\
&+ 13204526\, z^{33} + 4129\, z^{15} + 36095102\, z^{36} + 4393287\, z^{30} + 89755449\, z^{39} + 1328545\, z^{27} \\
&+ 90628\, z^{21} + 63\, z^{8} + 16\, z^{6} + 3469135\, z^{99} + 417359802\, z^{45} + 25584\, z^{108} + 8\, z^{5} + 33\, z^{7} \\
&+ 225\, z^{10} + 148315264\, z^{89} + 79298004\, z^{91} + 56695196\, z^{92} + 27675367\, z^{94} \\
&+ 18885015\, z^{95} + 8372800\, z^{97} + 5435626\, z^{98} + 2174395\, z^{100} + 1338790\, z^{101} \\
&+ 479339\, z^{103} + 278280\, z^{104} + 88204\, z^{106} + 48126\, z^{107} + 13348\, z^{109} + 6744\, z^{110} \\
&+ 848181768\, z^{82} + 688882553\, z^{83} + 436439448\, z^{85} + 340324807\, z^{86} + 198431393\, z^{88} \\
&+ 1235964517\, z^{80} + 1710204982\, z^{78} + 519559381\, z^{46} + 1121537006\, z^{50} \\
&+ 2576241555\, z^{56} + 3813878148\, z^{70} + 2815570112\, z^{74} + 3993437445\, z^{62} \\
&+ 3116054839\, z^{58} + 4134086103\, z^{68} + 2249523074\, z^{76} + 4227813312\, z^{64} \\
&+ 779843029\, z^{48} + 1545167948\, z^{52}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T4 := z \rightarrow {} & 1 + z + 27675367\, z^{94} + 10\, z^{118} + 4\, z^{119} + 1030602778\, z^{81} + 3469135\, z^{99} \qquad \textbf{(21)} \\
&+ 202984042\, z^{42} + 3356383912\, z^{72} + 519559381\, z^{46} + 1121537006\, z^{50} + 4227813312\, z^{64} \\
&+ 779843029\, z^{48} + 18885015\, z^{95} + 8372800\, z^{97} + 1463215476\, z^{79} + 156284730\, z^{41} \\
&+ 848181768\, z^{82} + 758\, z^{113} + 154\, z^{115} + 3816383212\, z^{61} + 639939517\, z^{47} \\
&+ 940236752\, z^{49} + 2576241555\, z^{56} + 808547\, z^{102} + 338\, z^{114} + 2174395\, z^{100} \\
&+ 1338790\, z^{101} + 2038928979\, z^{54} + 109250394\, z^{90} + 688882553\, z^{83} + 436439448\, z^{85} \\
&+ z^{120} + 2304400735\, z^{55} + 3371001341\, z^{59} + 2249523074\, z^{76} + 3813878148\, z^{70} \\
&+ 2815570112\, z^{74} + 4277663720\, z^{66} + 3993437445\, z^{62} + 1545167948\, z^{52} \\
&+ 119063149\, z^{40} + 89755449\, z^{39} + 1323523938\, z^{51} + 3994067586\, z^{69} + 5435626\, z^{98} \\
&+ 27\, z^{117} + 1973755292\, z^{77} + 4276971739\, z^{65} + 4229607116\, z^{67} + 479339\, z^{103} \\
&+ 1710204982\, z^{78} + 417359802\, z^{45} + 25584\, z^{108} + 3606730433\, z^{60} + 4132169661\, z^{63}
\end{aligned}
$$

$$+ 2532213546 z^{75} + 552046535 z^{84} + 148315264 z^{89} + 261713408 z^{87} + 3599155257 z^{71}$$
$$+ 3353 z^{111} + 39922778 z^{93} + 340324807 z^{86} + 13348 z^{109} + 6744 z^{110} + 3116054839 z^{58}$$
$$+ 4134086103 z^{68} + 62 z^{116} + z^{2} + 2 z^{3} + 198431393 z^{88} + 1235964517 z^{80} + 1604 z^{112}$$
$$+ 48126 z^{107} + 278280 z^{104} + 88204 z^{106} + 4 z^{4} + 12677964 z^{96} + 158476 z^{105} + 749 z^{12}$$
$$+ 1344 z^{13} + z^{121} + 2848892771 z^{57} + 79298004 z^{91} + 56695196 z^{92} + 12104 z^{17}$$
$$+ 231801 z^{23} + 33883 z^{19} + 567206 z^{25} + 2000536 z^{28} + 26088244 z^{35} + 49418998 z^{37}$$
$$+ 6407683 z^{31} + 2980554 z^{29} + 18657905 z^{34} + 66951451 z^{38} + 9246830 z^{32} + 364555 z^{24}$$
$$+ 55706 z^{20} + 872727 z^{26} + 20354 z^{18} + 2365 z^{14} + 7106 z^{16} + 145729 z^{22} + 13204526 z^{33}$$
$$+ 4129 z^{15} + 36095102 z^{36} + 4393287 z^{30} + 1328545 z^{27} + 90628 z^{21} + 8 z^{5} + 225 z^{10}$$
$$+ 121 z^{9} + 33 z^{7} + 16 z^{6} + 63 z^{8} + 415 z^{11} + 3092740855 z^{73} + 331715843 z^{44}$$
$$+ 260865858 z^{43} + 1784589063 z^{53}$$

>

> **2. menghitung *Cycle Index* untuk grup simetri berorder m = 4**

> $T0(z) := 1 + z$

$$T0 := z \rightarrow 1 + z \tag{1}$$

> $T0(z^2) := expand(T0(z^2));$

$$T0(z^2) := 1 + z^2 \tag{2}$$

> $T0(z^3) := expand(T0(z^3));$

$$T0(z^3) := 1 + z^3 \tag{3}$$

> $T0(z^4) := expand(T0(z^4));$

$$T0(z^4) := 1 + z^4 \tag{4}$$

>

> $S4(T0) := expand\left(\frac{1}{24}\left(\left((T0(z))^4\right) + \left(6\cdot\left(T0(z^2)\right)\cdot(T0(z))^2\right) + \left(8\cdot\left(T0(z^3)\right)\cdot(T0(z))\right) + \left(3\cdot\left(T0(z^2)\right)^2\right) + \left(6\cdot\left(T0(z^4)\right)\right)\right)\right);$

$$S4(T0) := 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 \tag{5}$$

> $T1(z) := 1 + z + z^3 + z^2 + z^4$

$$T1 := z \rightarrow 1 + z + z^3 + z^2 + z^4 \tag{6}$$

> $T1(z^2) := expand(T1(z^2));$

$$T1(z^2) := 1 + z^2 + z^6 + z^4 + z^8 \tag{7}$$

> $T1(z^3) := expand(T1(z^3));$

$$T1(z^3) := 1 + z^3 + z^9 + z^6 + z^{12} \tag{8}$$

> $T1(z^4) := expand(T1(z^4));$

$$T1(z^4) := 1 + z^4 + z^{12} + z^8 + z^{16} \tag{9}$$

> $S4(T1) := expand\left(\frac{1}{24}\left(\left((T1(z))^4\right) + \left(6\cdot\left(T1(z^2)\right)\cdot(T1(z))^2\right) + \left(8\cdot\left(T1(z^3)\right)\cdot(T1(z))\right) + \left(3\cdot\left(T1(z^2)\right)^2\right) + \left(6\cdot\left(T1(z^4)\right)\right)\right)\right);$

$$S4(T1) := 1 + z + 5 z^5 + 7 z^7 + z^{15} + 7 z^6 + 8 z^8 + 7 z^9 + 5 z^{12} + 2 z^2 + 3 z^3 + 5 z^4 + 2 z^{14} + 7 z^{10} + 3 z^{13} + 5 z^{11} + z^{16} \tag{10}$$

> $T2(z) := 1 + z + z^2 + 4 z^5 + 2 z^3 + 3 z^4 + z^{12} + 3 z^{10} + z^{13} + 4 z^9 + 5 z^7 + 4 z^6 + 4 z^8 + 2 z^{11}$

$$T2 := z \rightarrow 1 + z + z^2 + 4 z^5 + 2 z^3 + 3 z^4 + z^{12} + 3 z^{10} + z^{13} + 4 z^9 + 5 z^7 + 4 z^6 + 4 z^8 + 2 z^{11} \tag{11}$$

> $T2(z^2) := expand(T2(z^2));$

$$T2(z^2) := 1 + z^2 + z^4 + 4 z^{10} + 2 z^6 + 3 z^8 + z^{24} + 3 z^{20} + z^{26} + 4 z^{18} + 5 z^{14} + 4 z^{12} + 4 z^{16} + 2 z^{22} \tag{12}$$

> $T2(z^3) := expand(T2(z^3));$

$$T2(z^3) := 1 + z^3 + z^6 + 4 z^{15} + 2 z^9 + 3 z^{12} + z^{36} + 3 z^{30} + z^{39} + 4 z^{27} + 5 z^{21} + 4 z^{18} + 4 z^{24} + 2 z^{33} \tag{13}$$

> $T2(z^4) := expand(T2(z^4));$

$$T2(z^4) := 1 + z^4 + z^8 + 4z^{20} + 2z^{12} + 3z^{16} + z^{48} + 3z^{40} + z^{52} + 4z^{36} + 5z^{28} + 4z^{24} + 4z^{32} + 2z^{44} \quad \textbf{(14)}$$

> $S4(T2) := expand\left(\frac{1}{24}\left(\left((T2(z))^4\right) + \left(6\cdot(T2(z^2))\cdot(T2(z))^2\right) + \left(8\cdot(T2(z^3))\cdot(T2(z))\right) + \left(3\cdot(T2(z^2))^2\right) + \left(6\cdot(T2(z^4))\right)\right)\right);$

$$S4(T2) := 1 + z + 13z^5 + 1382z^{17} + 436z^{41} + 189z^{43} + 70z^{45} + z^{51} + 22z^{47} + 6z^{49} + 4815z^{25} + 2172z^{19} + 4056z^{23} + 37z^7 + 805z^{15} + 23z^6 + 60z^8 + 92z^9 + 305z^{12} + 3027z^{34} + 297z^{42} + 5053z^{29} + 2z^2 + 2031z^{36} + 4823z^{30} + 885z^{39} + 5184z^{27} + 3110z^{21} + 3523z^{33} + 4z^3 + 4489z^{24} + 2639z^{20} + 5073z^{26} + 1761z^{18} + 3608z^{22} + 3z^{50} + 4451z^{31} + 1581z^{37} + 8z^4 + 1211z^{38} + 43z^{46} + 597z^{14} + 142z^{10} + 428z^{13} + 207z^{11} + 13z^{48} + 642z^{40} + z^{52} + 5205z^{28} + 4031z^{32} + 121z^{44} + 2498z^{35} + 1074z^{16} \quad \textbf{(15)}$$

> $T3(z) := 1 + z + 184z^{13} + 432z^{17} + 601z^{23} + 551z^{19} + 514z^{25} + 312z^{28} + 20z^{35} + 6z^{37} + 128z^{31} + 238z^{29} + 37z^{34} + 3z^{38} + 89z^{32} + 4z^4 + z^2 + 2z^3 + 99z^{11} + 570z^{24} + 594z^{20} + 453z^{26} + 498z^{18} + 239z^{14} + 369z^{16} + 624z^{22} + z^{40} + 47z^9 + 137z^{12} + 56z^{33} + 300z^{15} + 12z^{36} + 181z^{30} + z^{39} + 378z^{27} + 614z^{21} + 31z^8 + 12z^6 + 7z^5 + 20z^7 + 70z^{10}$

$$T3 := z \rightarrow 1 + z + 453z^{26} + 31z^8 + 99z^{11} + 498z^{18} + 239z^{14} + 594z^{20} + 570z^{24} + 624z^{22} + 369z^{16} + 432z^{17} + 601z^{23} + 551z^{19} + 514z^{25} + 312z^{28} + 20z^{35} + 6z^{37} + 128z^{31} + 238z^{29} + 37z^{34} + 3z^{38} + 89z^{32} + 2z^3 + z^2 + 4z^4 + z^{40} + z^{39} + 184z^{13} + 7z^5 + 70z^{10} + 47z^9 + 137z^{12} + 20z^7 + 12z^6 + 56z^{33} + 300z^{15} + 12z^{36} + 181z^{30} + 378z^{27} + 614z^{21} \quad \textbf{(16)}$$

> $T3(z^2) := expand(T3(z^2));$

$$T3(z^2) := 1 + 2z^6 + 4z^8 + 12z^{12} + 432z^{34} + 614z^{42} + z^2 + 498z^{36} + 300z^{30} + 137z^{24} + 70z^{20} + 184z^{26} + 47z^{18} + 99z^{22} + 514z^{50} + z^4 + 551z^{38} + 601z^{46} + 20z^{14} + 7z^{10} + 570z^{48} + 594z^{40} + 453z^{52} + 239z^{28} + 369z^{32} + 624z^{44} + 31z^{16} + 312z^{56} + 20z^{70} + 6z^{74} + 128z^{62} + 238z^{58} + 37z^{68} + 3z^{76} + 89z^{64} + z^{80} + z^{78} + 56z^{66} + 12z^{72} + 181z^{60} + 378z^{54} \quad \textbf{(17)}$$

> $T3(z^3) := expand(T3(z^3));$

$$T3(z^3) := 1 + 20z^{105} + 128z^{93} + 238z^{87} + 6z^{111} + 601z^{69} + 514z^{75} + 312z^{84} + 551z^{57} + z^{120} + z^{117} + 37z^{102} + 89z^{96} + 3z^{114} + 300z^{45} + 432z^{51} + 181z^{90} + 378z^{81} + 12z^{108} + 56z^{99} + 614z^{63} + 7z^{15} + z^6 + 2z^9 + 4z^{12} + 239z^{42} + 137z^{36} + 70z^{30} + 184z^{39} + 47z^{27} + 20z^{21} + 99z^{33} + z^3 + 31z^{24} + 12z^{18} + 369z^{48} + 453z^{78} + 624z^{66} + 570z^{72} + 594z^{60} + 498z^{54} \quad \textbf{(18)}$$

> $T3(z^4) := expand(T3(z^4));$

$$T3(z^4) := 1 + 614z^{84} + 181z^{120} + 570z^{96} + 378z^{108} + 453z^{104} + z^8 + 2z^{12} + 47z^{36} + 12z^{24} + 7z^{20} + z^4 + 137z^{48} + 70z^{40} + 184z^{52} + 20z^{28} + 31z^{32} + 99z^{44} + z^{160} + z^{156} + 6z^{148} + 128z^{124} + 238z^{116} + 514z^{100} + 312z^{112} + 20z^{140} + 624z^{88} + 601z^{92} + 37z^{136} + 3z^{152} \quad \textbf{(19)}$$

$+ 89 z^{128} + 56 z^{132} + 12 z^{144} + 4 z^{16} + 239 z^{56} + 432 z^{68} + 551 z^{76} + 369 z^{64} + 594 z^{80} + 498 z^{72} + 300 z^{60}$

> $S4(T3) := expand\left(\frac{1}{24}\left(\left((T3(z))^4\right) + \left(6\cdot\left(T3(z^2)\right)\cdot(T3(z))^2\right) + \left(8\cdot\left(T3(z^3)\right)\cdot(T3(z))\right) + \left(3\cdot\left(T3(z^2)\right)^2\right) + \left(6\cdot\left(T3(z^4)\right)\right)\right)\right);$

$$S4(T3) := 1 + z + 17 z^{5} + 31214 z^{17} + 1550622403082 z^{105} + 6301287800999 z^{93} + 7793509690628 z^{87} + 458712279521 z^{111} + 2348296152053 z^{69} + 4724117551582 z^{75} + 7708303031031 z^{84} + 242092037772 z^{57} + 36655007315 z^{120} + 93794870375 z^{117} + 2497757044183 z^{102} + 5026272539007 z^{96} + 217527660783 z^{114} + 1966934355 z^{41} + 4010267620 z^{43} + 7921540348 z^{45} + 50501579049 z^{51} + 15160381201 z^{47} + 28111063505 z^{49} + 2091250 z^{25} + 93962 z^{19} + 768601 z^{23} + 7290046670650 z^{90} + 7061048862026 z^{81} + 882066320497 z^{108} + 3694265689677 z^{99} + 1835238780538 z^{104} + 871268875868 z^{63} + 1297485969724 z^{106} + 576220204190 z^{110} + 69340062364 z^{118} + 18518094573 z^{122} + 4104925184 z^{126} + 746870615 z^{130} + 70 z^{7} + 10013 z^{15} + 36 z^{6} + 138 z^{8} + 3866840616043 z^{73} + 5584126565065 z^{77} + 6385145690072 z^{79} + 261 z^{9} + 1704 z^{12} + 126577786 z^{34} + 2819697371 z^{42} + 14039153 z^{29} + 2 z^{2} + 288434250 z^{36} + 22147548 z^{30} + 934629682 z^{39} + 5506913 z^{27} + 273293 z^{21} + 82852245 z^{33} + 110036672 z^{134} + 12916099 z^{138} + 1185098 z^{142} + 83163 z^{146} + 4356 z^{150} + 166 z^{154} + 4 z^{158} + 4 z^{3} + 1273238 z^{24} + 160997 z^{20} + 3407710 z^{26} + 54436 z^{18} + 460356 z^{22} + 37827674279 z^{50} + 34656821 z^{31} + 430225424 z^{37} + 9 z^{4} + 7549926722035 z^{83} + 7803214029356 z^{85} + 7519375814392 z^{89} + 7005971485555 z^{91} + 636644217 z^{38} + 11002141658 z^{46} + 5468753945422 z^{95} + 4577790450782 z^{97} + 2872674173438 z^{101} + 2151276069645 z^{103} + 1075094178825 z^{107} + 716519844425 z^{109} + 281869703185 z^{113} + 166108337266 z^{115} + 50697647707 z^{119} + 26203330757 z^{121} + 12935448538 z^{123} + 5606 z^{14} + 497 z^{10} + 3096 z^{13} + 919 z^{11} + 87898066770 z^{53} + 20725789894 z^{48} + 1361254083 z^{40} + 66890238732 z^{52} + 8828845 z^{28} + 53801633 z^{32} + 5658612903 z^{44} + z^{160} + 28 z^{156} + 19783 z^{148} + 8929893881 z^{124} + 125496238452 z^{116} + 3272923326399 z^{100} + 361444830281 z^{112} + 4039953 z^{140} + 7688524521792 z^{88} + 6673832362646 z^{92} + 38829467 z^{136} + 886 z^{152} + 1796130456 z^{128} + 294617997 z^{132} + 325111 z^{144} + 191835278 z^{35} + 17785 z^{16} + 6091314535 z^{125} + 2732367475 z^{127} + 1165732822 z^{129} + 472234295 z^{131} + 181304759 z^{133} + 65837165 z^{135} + 22562248 z^{137} + 7279523 z^{139} + 2205474 z^{141} + 625713 z^{143} + 165746 z^{145} + 40848 z^{147} + 9331 z^{149} + 1968 z^{151} + 7332317202179 z^{82} + 7831964252014 z^{86} + 5896688157356 z^{94} + 4131352891288 z^{98} + 378 z^{153} + 65 z^{155} + 10 z^{157} + z^{159} + 190176647659 z^{56} + 2692871244341 z^{70} + 4291652253163 z^{74} + 718032347790 z^{62} + 305735947199 z^{58} + 2031247019834 z^{68} + 5157445093553 z^{76} + 1048753282517 z^{64} + 6742814244981 z^{80} \quad \mathbf{(20)}$$

$$+ 5996134419113 z^{78} + 1483302985527 z^{66} + 3455619681599 z^{72} + 476088716874 z^{60}$$
$$+ 114591675124 z^{54} + 148210808795 z^{55} + 383045439008 z^{59} + 587021488597 z^{61}$$
$$+ 1252279254458 z^{65} + 1742820215578 z^{67} + 3062969620172 z^{71}$$

>

> **3. *Centered Tree***

>

> $S4T_{-1}(z) := 1$

$$S4T_{-1} := z \rightarrow 1 \tag{1}$$

> $S4T_{-2}(z) := 0$

$$S4T_{-2} := z \rightarrow 0 \tag{2}$$

> $T_{-1}(z) := 1$

$$T_{-1} := z \rightarrow 1 \tag{3}$$

> $T_{-2}(z) := 0$

$$T_{-2} := z \rightarrow 0 \tag{4}$$

>

> $\boldsymbol{C0 := expand\Big(\big(1 + z\cdot\big(S4T_{-1}(z)\big)\big) - \big(1 + z\cdot S4T_{-2}(z)\big) - \Big(\big(T_{-1}(z)\big) - \big(T_{-2}(z)\big)\Big) \cdot \Big(\big(T_{-1}(z)\big) - 1\Big)\Big);}$

$$C0 := z \tag{5}$$

> $S4T0(z) := 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$

$$S4T0 := z \rightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 \tag{6}$$

> $S4T_{-1}(z) := 1$

$$S4T_{-1} := z \rightarrow 1 \tag{7}$$

> $T0(z) := 1 + z$

$$T0 := z \rightarrow 1 + z \tag{8}$$

> $T_{-1}(z) := 1$

$$T_{-1} := z \rightarrow 1 \tag{9}$$

> $\boldsymbol{C2 := expand\Big((1 + z\cdot(S4T0(z))) - \big(1 + z\cdot\big(S4T_{-1}(z)\big)\big) - \Big((T0(z)) - \big(T_{-1}(z)\big)\Big) \cdot ((T0(z)) - 1)\Big);}$

$$C2 := z^3 + z^4 + z^5 \tag{10}$$

> $C2 := z^3 + z^4 + z^5$

$$C2 := z^3 + z^4 + z^5 \tag{11}$$

>

> $S4T1(z) := 1 + z + 5z^5 + 7z^7 + z^{15} + 7z^6 + 8z^8 + 7z^9 + 5z^{12} + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 2z^{14} + 7z^{10} + 3z^{13} + 5z^{11} + z^{16}$

$$S4T1 := z \rightarrow 1 + z + 5z^5 + 7z^7 + z^{15} + 7z^6 + 8z^8 + 7z^9 + 5z^{12} + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 2z^{14} + 7z^{10} + 3z^{13} + 5z^{11} + z^{16} \tag{12}$$

> $S4T0(z) := 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$

$$S4T0 := z \rightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 \tag{13}$$

> $T1(z) := 1 + z + z^3 + z^2 + z^4$

$$T1 := z \rightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 \tag{14}$$

$> T0(z) := 1 + z$

$$T0 := z \rightarrow 1 + z \quad \textbf{(15)}$$

$> \boldsymbol{C4 := expand((1 + z \cdot (S4T1(z))) \text{-} (1 + z \cdot (S4T0(z))) - ((T1(z)) - (T0(z))) \cdot ((T1(z)) - 1));}$

$$C4 := 7 z^{11} + z^{16} + z^{17} + 7 z^{10} + 5 z^{13} + 5 z^{7} + 2 z^{15} + 2 z^{6} + 6 z^{8} + 8 z^{9} + 5 z^{12} + 3 z^{14} + z^{5} \quad \textbf{(16)}$$

$> C4 := 7 z^{11} + z^{16} + z^{17} + 7 z^{10} + 5 z^{13} + 5 z^{7} + 2 z^{15} + 2 z^{6} + 6 z^{8} + 8 z^{9} + 5 z^{12} + 3 z^{14} + z^{5}$

$$C4 := 7 z^{11} + z^{16} + z^{17} + 7 z^{10} + 5 z^{13} + 5 z^{7} + 2 z^{15} + 2 z^{6} + 6 z^{8} + 8 z^{9} + 5 z^{12} + 3 z^{14} + z^{5} \quad \textbf{(17)}$$

$>$

$> S4T2(z) := 1 + z + 13 z^{5} + 1382 z^{17} + 436 z^{41} + 189 z^{43} + 70 z^{45} + z^{51} + 22 z^{47} + 6 z^{49} + 4815 z^{25} + 2172 z^{19} + 4056 z^{23} + 37 z^{7} + 805 z^{15} + 23 z^{6} + 60 z^{8} + 92 z^{9} + 305 z^{12} + 3027 z^{34} + 297 z^{42} + 5053 z^{29} + 2 z^{2} + 2031 z^{36} + 4823 z^{30} + 885 z^{39} + 5184 z^{27} + 3110 z^{21} + 3523 z^{33} + 4 z^{3} + 4489 z^{24} + 2639 z^{20} + 5073 z^{26} + 1761 z^{18} + 3608 z^{22} + 3 z^{50} + 4451 z^{31} + 1581 z^{37} + 8 z^{4} + 1211 z^{38} + 43 z^{46} + 597 z^{14} + 142 z^{10} + 428 z^{13} + 207 z^{11} + 13 z^{48} + 642 z^{40} + z^{52} + 5205 z^{28} + 4031 z^{32} + 121 z^{44} + 2498 z^{35} + 1074 z^{16}$

$$S4T2 := z \rightarrow 1 + z + 1581 z^{37} + 1211 z^{38} + 43 z^{46} + 13 z^{48} + 642 z^{40} + 5205 z^{28} + 4031 z^{32} + 121 z^{44} + 2498 z^{35} + z^{51} + 3027 z^{34} + 3523 z^{33} + 2 z^{2} + 4 z^{3} + 8 z^{4} + 22 z^{47} + 6 z^{49} + 2031 z^{36} + 4823 z^{30} + 2172 z^{19} + 4056 z^{23} + 885 z^{39} + 297 z^{42} + 5053 z^{29} + 5184 z^{27} + 3110 z^{21} + z^{52} + 1382 z^{17} + 805 z^{15} + 1074 z^{16} + 13 z^{5} + 37 z^{7} + 23 z^{6} + 60 z^{8} + 92 z^{9} + 305 z^{12} + 597 z^{14} + 142 z^{10} + 428 z^{13} + 207 z^{11} + 189 z^{43} + 436 z^{41} + 4815 z^{25} + 70 z^{45} + 4489 z^{24} + 2639 z^{20} + 5073 z^{26} + 1761 z^{18} + 3608 z^{22} + 3 z^{50} + 4451 z^{31} \quad \textbf{(18)}$$

$> S4T1(z) := 1 + z + 5 z^{5} + 7 z^{7} + z^{15} + 7 z^{6} + 8 z^{8} + 7 z^{9} + 5 z^{12} + 2 z^{2} + 3 z^{3} + 5 z^{4} + 2 z^{14} + 7 z^{10} + 3 z^{13} + 5 z^{11} + z^{16}$

$$S4T1 := z \rightarrow 1 + z + 5 z^{5} + 7 z^{7} + z^{15} + 7 z^{6} + 8 z^{8} + 7 z^{9} + 5 z^{12} + 2 z^{2} + 3 z^{3} + 5 z^{4} + 2 z^{14} + 7 z^{10} + 3 z^{13} + 5 z^{11} + z^{16} \quad \textbf{(19)}$$

$> T2(z) := 1 + z + z^{2} + 4 z^{5} + 2 z^{3} + 3 z^{4} + z^{12} + 3 z^{10} + z^{13} + 4 z^{9} + 5 z^{7} + 4 z^{6} + 4 z^{8} + 2 z^{11}$

$$T2 := z \rightarrow 1 + z + z^{2} + 4 z^{5} + 2 z^{3} + 3 z^{4} + z^{12} + 3 z^{10} + z^{13} + 4 z^{9} + 5 z^{7} + 4 z^{6} + 4 z^{8} + 2 z^{11} \quad \textbf{(20)}$$

$> T1(z) := 1 + z + z^{3} + z^{2} + z^{4}$

$$T1 := z \rightarrow 1 + z + z^{2} + z^{3} + z^{4} \quad \textbf{(21)}$$

$>$

$> \boldsymbol{C6 := expand((1 + z \cdot (S4T2(z))) \text{-} (1 + z \cdot (S4T1(z))) - ((T2(z)) - (T1(z))) \cdot ((T2(z)) - 1));}$

$$C6 := 59 z^{11} + 700 z^{16} + 2031 z^{37} + 6 z^{50} + 4823 z^{31} + 1581 z^{38} + 70 z^{46} + 22 z^{48} + 885 z^{40} + 5184 z^{28} + 4451 z^{32} + 189 z^{44} + 3027 z^{35} + 3 z^{51} + 3523 z^{34} + 4031 z^{33} + 43 z^{47} + 13 z^{49} + 2498 z^{36} + 5053 z^{30} + 1703 z^{19} + 3598 z^{23} + 1211 z^{39} + 436 z^{42} + 5205 z^{29} + 5073 z^{27} + 2611 z^{21} + z^{52} + 297 z^{43} + 642 z^{41} + 4487 z^{25} + 121 z^{45} + 4051 z^{24} + 2129 z^{20} + 4814 z^{26} + 1306 z^{18} + 3092 z^{22} + 982 z^{17} + 26 z^{10} + 196 z^{13} + z^{53} + z^{7} + 485 z^{15} + 3 z^{8} + 11 z^{9} + 109 z^{12} + 313 z^{14} \quad \textbf{(22)}$$

$> C6 := 59 z^{11} + 700 z^{16} + 2031 z^{37} + 6 z^{50} + 4823 z^{31} + 1581 z^{38} + 70 z^{46} + 22 z^{48} + 885 z^{40} + 5184 z^{28} + 4451 z^{32} + 189 z^{44} + 3027 z^{35} + 3 z^{51} + 3523 z^{34} + 4031 z^{33} + 43 z^{47}$

$$+ 13\, z^{49} + 2498\, z^{36} + 5053\, z^{30} + 1703\, z^{19} + 3598\, z^{23} + 1211\, z^{39} + 436\, z^{42} + 5205\, z^{29}$$
$$+ 5073\, z^{27} + 2611\, z^{21} + z^{52} + 297\, z^{43} + 642\, z^{41} + 4487\, z^{25} + 121\, z^{45} + 4051\, z^{24}$$
$$+ 2129\, z^{20} + 4814\, z^{26} + 1306\, z^{18} + 3092\, z^{22} + 982\, z^{17} + 26\, z^{10} + 196\, z^{13} + z^{53} + z^{7}$$
$$+ 485\, z^{15} + 3\, z^{8} + 11\, z^{9} + 109\, z^{12} + 313\, z^{14}$$

$$C6 := 70\, z^{46} + 22\, z^{48} + 885\, z^{40} + 5184\, z^{28} + 4451\, z^{32} + 1581\, z^{38} + 2611\, z^{21} + z^{52} + 297\, z^{43} \qquad \textbf{(23)}$$
$$+ 4051\, z^{24} + 2129\, z^{20} + 4814\, z^{26} + 642\, z^{41} + 4487\, z^{25} + 121\, z^{45} + 13\, z^{49} + 2498\, z^{36}$$
$$+ 5053\, z^{30} + 2031\, z^{37} + 6\, z^{50} + 4823\, z^{31} + 436\, z^{42} + 5205\, z^{29} + 5073\, z^{27} + z^{53} + 59\, z^{11}$$
$$+ 700\, z^{16} + 982\, z^{17} + 26\, z^{10} + 196\, z^{13} + z^{7} + 485\, z^{15} + 3\, z^{8} + 11\, z^{9} + 109\, z^{12} + 313\, z^{14}$$
$$+ 1306\, z^{18} + 3092\, z^{22} + 189\, z^{44} + 3027\, z^{35} + 3\, z^{51} + 3523\, z^{34} + 4031\, z^{33} + 43\, z^{47}$$
$$+ 1703\, z^{19} + 3598\, z^{23} + 1211\, z^{39}$$

>

> $$S4T3(z) := 1 + z + 17\, z^{5} + 31214\, z^{17} + 1550622403082\, z^{105} + 6301287800999\, z^{93}$$
$$+ 7793509690628\, z^{87} + 458712279521\, z^{111} + 2348296152053\, z^{69} + 4724117551582\, z^{75}$$
$$+ 7708303031031\, z^{84} + 242092037772\, z^{57} + 36655007315\, z^{120} + 93794870375\, z^{117}$$
$$+ 2497757044183\, z^{102} + 5026272539007\, z^{96} + 217527660783\, z^{114} + 1966934355\, z^{41}$$
$$+ 4010267620\, z^{43} + 7921540348\, z^{45} + 50501579049\, z^{51} + 15160381201\, z^{47}$$
$$+ 28111063505\, z^{49} + 2091250\, z^{25} + 93962\, z^{19} + 768601\, z^{23} + 7290046670650\, z^{90}$$
$$+ 7061048862026\, z^{81} + 882066320497\, z^{108} + 3694265689677\, z^{99} + 1835238780538\, z^{104}$$
$$+ 871268875868\, z^{63} + 1297485969724\, z^{106} + 576220204190\, z^{110} + 69340062364\, z^{118}$$
$$+ 18518094573\, z^{122} + 4104925184\, z^{126} + 746870615\, z^{130} + 70\, z^{7} + 10013\, z^{15} + 36\, z^{6}$$
$$+ 138\, z^{8} + 3866840616043\, z^{73} + 5584126565065\, z^{77} + 6385145690072\, z^{79} + 261\, z^{9}$$
$$+ 1704\, z^{12} + 126577786\, z^{34} + 2819697371\, z^{42} + 14039153\, z^{29} + 2\, z^{2} + 288434250\, z^{36}$$
$$+ 22147548\, z^{30} + 934629682\, z^{39} + 5506913\, z^{27} + 273293\, z^{21} + 82852245\, z^{33}$$
$$+ 110036672\, z^{134} + 12916099\, z^{138} + 1185098\, z^{142} + 83163\, z^{146} + 4356\, z^{150} + 166\, z^{154}$$
$$+ 4\, z^{158} + 4\, z^{3} + 1273238\, z^{24} + 160997\, z^{20} + 3407710\, z^{26} + 54436\, z^{18} + 460356\, z^{22}$$
$$+ 37827674279\, z^{50} + 34656821\, z^{31} + 430225424\, z^{37} + 9\, z^{4} + 7549926722035\, z^{83}$$
$$+ 7803214029356\, z^{85} + 7519375814392\, z^{89} + 7005971485555\, z^{91} + 636644217\, z^{38}$$
$$+ 11002141658\, z^{46} + 5468753945422\, z^{95} + 4577790450782\, z^{97} + 2872674173438\, z^{101}$$
$$+ 2151276069645\, z^{103} + 1075094178825\, z^{107} + 716519844425\, z^{109} + 281869703185\, z^{113}$$
$$+ 166108337266\, z^{115} + 50697647707\, z^{119} + 26203330757\, z^{121} + 12935448538\, z^{123}$$
$$+ 5606\, z^{14} + 497\, z^{10} + 3096\, z^{13} + 919\, z^{11} + 87898066770\, z^{53} + 20725789894\, z^{48}$$
$$+ 1361254083\, z^{40} + 66890238732\, z^{52} + 8828845\, z^{28} + 53801633\, z^{32} + 5658612903\, z^{44}$$
$$+ z^{160} + 28\, z^{156} + 19783\, z^{148} + 8929893881\, z^{124} + 125496238452\, z^{116}$$
$$+ 3272923326399\, z^{100} + 361444830281\, z^{112} + 4039953\, z^{140} + 7688524521792\, z^{88}$$
$$+ 6673832362646\, z^{92} + 38829467\, z^{136} + 886\, z^{152} + 1796130456\, z^{128} + 294617997\, z^{132}$$
$$+ 325111\, z^{144} + 191835278\, z^{35} + 17785\, z^{16} + 6091314535\, z^{125} + 2732367475\, z^{127}$$
$$+ 1165732822\, z^{129} + 472234295\, z^{131} + 181304759\, z^{133} + 65837165\, z^{135} + 22562248\, z^{137}$$
$$+ 7279523\, z^{139} + 2205474\, z^{141} + 625713\, z^{143} + 165746\, z^{145} + 40848\, z^{147} + 9331\, z^{149}$$
$$+ 1968\, z^{151} + 7332317202179\, z^{82} + 7831964252014\, z^{86} + 5896688157356\, z^{94}$$
$$+ 4131352891288\, z^{98} + 378\, z^{153} + 65\, z^{155} + 10\, z^{157} + z^{159} + 190176647659\, z^{56}$$
$$+ 2692871244341\, z^{70} + 4291652253163\, z^{74} + 718032347790\, z^{62} + 305735947199\, z^{58}$$

$+ 2031247019834 z^{68} + 5157445093553 z^{76} + 1048753282517 z^{64} + 6742814244981 z^{80} + 5996134419113 z^{78} + 1483302985527 z^{66} + 3455619681599 z^{72} + 476088716874 z^{60} + 114591675124 z^{54} + 148210808795 z^{55} + 383045439008 z^{59} + 587021488597 z^{61} + 1252279254458 z^{65} + 1742820215578 z^{67} + 3062969620172 z^{71}$

$$S4T3 := z \rightarrow 1 + z + 4 z^{158} + 3455619681599 z^{72} + 1165732822 z^{129} + 4131352891288 z^{98} + 378 z^{153} + 65 z^{155} + 5468753945422 z^{95} + 12916099 z^{138} + 1185098 z^{142} + 430225424 z^{37} + 636644217 z^{38} + 11002141658 z^{46} + 20725789894 z^{48} + 1361254083 z^{40} + 8828845 z^{28} + 53801633 z^{32} + 83163 z^{146} + 5658612903 z^{44} + 191835278 z^{35} + 4577790450782 z^{97} + 22562248 z^{137} + 7279523 z^{139} + 4356 z^{150} + 166 z^{154} + 190176647659 z^{56} + 2692871244341 z^{70} + 5584126565065 z^{77} + 6385145690072 z^{79} + 3866840616043 z^{73} + 294617997 z^{132} + 5157445093553 z^{76} + 1048753282517 z^{64} + 38829467 z^{136} + 2031247019834 z^{68} + 87898066770 z^{53} + 69340062364 z^{118} + 18518094573 z^{122} + 2497757044183 z^{102} + 5026272539007 z^{96} + 19783 z^{148} + 8929893881 z^{124} + z^{160} + 50501579049 z^{51} + 10 z^{157} + 9331 z^{149} + 1968 z^{151} + 126577786 z^{34} + 625713 z^{143} + 165746 z^{145} + 882066320497 z^{108} + 3694265689677 z^{99} + 82852245 z^{33} + 2 z^{2} + 4 z^{3} + 9 z^{4} + 15160381201 z^{47} + 28111063505 z^{49} + 2205474 z^{141} + 50697647707 z^{119} + 26203330757 z^{121} + 472234295 z^{131} + 181304759 z^{133} + 2872674173438 z^{101} + 2151276069645 z^{103} + z^{159} + 288434250 z^{36} + 22147548 z^{30} + 93962 z^{19} + 768601 z^{23} + 934629682 z^{39} + 2819697371 z^{42} + 14039153 z^{29} + 5506913 z^{27} + 273293 z^{21} + 66890238732 z^{52} + 31214 z^{17} + 716519844425 z^{109} + 281869703185 z^{113} + 3272923326399 z^{100} + 361444830281 z^{112} + 7688524521792 z^{88} + 6673832362646 z^{92} + 65837165 z^{135} + 125496238452 z^{116} + 10013 z^{15} + 17785 z^{16} + 17 z^{5} + 70 z^{7} + 36 z^{6} + 138 z^{8} + 261 z^{9} + 1704 z^{12} + 5606 z^{14} + 497 z^{10} + 3096 z^{13} + 919 z^{11} + 871268875868 z^{63} + 1297485969724 z^{106} + 40848 z^{147} + 7803214029356 z^{85} + 4010267620 z^{43} + 1966934355 z^{41} + 2091250 z^{25} + 1835238780538 z^{104} + 7061048862026 z^{81} + 7290046670650 z^{90} + 12935448538 z^{123} + 217527660783 z^{114} + 1075094178825 z^{107} + 1742820215578 z^{67} + 3062969620172 z^{71} + 7519375814392 z^{89} + 7005971485555 z^{91} + 7549926722035 z^{83} + 7332317202179 z^{82} + 886 z^{152} + 1796130456 z^{128} + 325111 z^{144} + 383045439008 z^{59} + 587021488597 z^{61} + 6742814244981 z^{80} + 5996134419113 z^{78} + 1483302985527 z^{66} + 746870615 z^{130} + 6091314535 z^{125} + 2732367475 z^{127} + 28 z^{156} + 148210808795 z^{55} + 4104925184 z^{126} + 1252279254458 z^{65} + 4291652253163 z^{74} + 1550622403082 z^{105} + 6301287800999 z^{93} + 7793509690628 z^{87} + 458712279521 z^{111} + 2348296152053 z^{69} + 4724117551582 z^{75} + 7708303031031 z^{84} + 242092037772 z^{57} + 36655007315 z^{120} + 93794870375 z^{117} + 110036672 z^{134} + 576220204190 z^{110} + 718032347790 z^{62} + 305735947199 z^{58} + 476088716874 z^{60} + 114591675124 z^{54} \quad \mathbf{(24)}$$

$+ 7921540348 z^{45} + 1273238 z^{24} + 160997 z^{20} + 3407710 z^{26} + 54436 z^{18} + 460356 z^{22} + 37827674279 z^{50} + 34656821 z^{31} + 7831964252014 z^{86} + 5896688157356 z^{94} + 166108337266 z^{115} + 4039953 z^{140}$

> $T3(z) := 1 + z + 184 z^{13} + 432 z^{17} + 601 z^{23} + 551 z^{19} + 514 z^{25} + 312 z^{28} + 20 z^{35} + 6 z^{37} + 128 z^{31} + 238 z^{29} + 37 z^{34} + 3 z^{38} + 89 z^{32} + 4 z^{4} + z^{2} + 2 z^{3} + 99 z^{11} + 570 z^{24} + 594 z^{20} + 453 z^{26} + 498 z^{18} + 239 z^{14} + 369 z^{16} + 624 z^{22} + z^{40} + 47 z^{9} + 137 z^{12} + 56 z^{33} + 300 z^{15} + 12 z^{36} + 181 z^{30} + z^{39} + 378 z^{27} + 614 z^{21} + 31 z^{8} + 12 z^{6} + 7 z^{5} + 20 z^{7} + 70 z^{10}$

$$T3 := z \rightarrow 1 + z + 6 z^{37} + 3 z^{38} + z^{40} + 312 z^{28} + 89 z^{32} + 20 z^{35} + 37 z^{34} + 56 z^{33} + z^{2} + 2 z^{3} + 4 z^{4} + 12 z^{36} + 181 z^{30} + 551 z^{19} + 601 z^{23} + z^{39} + 238 z^{29} + 378 z^{27} + 614 z^{21} + 432 z^{17} + 300 z^{15} + 369 z^{16} + 7 z^{5} + 20 z^{7} + 12 z^{6} + 31 z^{8} + 47 z^{9} + 137 z^{12} + 239 z^{14} + 70 z^{10} + 184 z^{13} + 99 z^{11} + 514 z^{25} + 570 z^{24} + 594 z^{20} + 453 z^{26} + 498 z^{18} + 624 z^{22} + 128 z^{31} \tag{25}$$

> $\boldsymbol{C8 := expand((1 + z\cdot(S4T3(z))) - (1 + z\cdot(S4T2(z))) - ((T3(z)) - (T2(z)))\cdot((T3(z)) - 1));}$

$$C8 := 19 z^{11} + 2880 z^{16} + 285713256 z^{37} + 28108605379 z^{50} + 21052387 z^{31} + 427236430 z^{38} + 7918075515 z^{46} + 15157355804 z^{48} + 931197966 z^{40} + 4952142 z^{28} + 33328429 z^{32} + 4006568986 z^{44} + 124431643 z^{35} + 37825519072 z^{51} + 80992776 z^{34} + 52216931 z^{33} + 10998875191 z^{47} + 20723038000 z^{49} + 189398726 z^{36} + 13151248 z^{30} + 26835 z^{19} + 334231 z^{23} + 633414853 z^{39} + 1963248999 z^{42} + 8120988 z^{29} + 2980316 z^{27} + 99655 z^{21} + 50499724321 z^{52} + 2815973856 z^{43} + 1357667868 z^{41} + 1032565 z^{25} + 5655001946 z^{45} + 592790 z^{24} + 52411 z^{20} + 1767688 z^{26} + 13262 z^{18} + 184506 z^{22} + 6337 z^{17} + 4 z^{10} + 191 z^{13} + 7793509690628 z^{88} + 7005971485555 z^{92} + 110036672 z^{135} + 166108337266 z^{116} + 718032254708 z^{63} + 1550622403082 z^{106} + 83163 z^{147} + 7708303031031 z^{85} + 2151276069645 z^{104} + 6742814244981 z^{81} + 7519375814392 z^{90} + 18518094573 z^{123} + 281869703185 z^{114} + 1297485969724 z^{107} + 1483302969771 z^{67} + 2692871242647 z^{71} + 38829467 z^{137} + 12916099 z^{139} + 9331 z^{150} + 5157445093535 z^{77} + 5996134419111 z^{79} + 3455619681149 z^{73} + 7688524521792 z^{89} + 7290046670650 z^{91} + 7332317202179 z^{83} + 7061048862026 z^{82} + 1968 z^{152} + 2732367475 z^{128} + 625713 z^{144} + 305735574429 z^{59} + 476088521880 z^{61} + 6385145690071 z^{80} + 5584126565058 z^{78} + 1252279228882 z^{66} + 1165732822 z^{130} + 8929893881 z^{125} + 4104925184 z^{127} + 65 z^{156} + 114590622444 z^{55} + 6091314535 z^{126} + 1048753242179 z^{65} + 3866840615821 z^{74} + 1835238780538 z^{105} + 6673832362646 z^{93} + 7831964252014 z^{87} + 576220204190 z^{111} + 2031247014336 z^{69} + 4291652253063 z^{75} + 7549926722035 z^{84} + 190175994547 z^{57} + 50697647707 z^{120} + 125496238452 z^{117} + 181304759 z^{134} + 716519844425 z^{110} + 587021352221 z^{62} + 242091538988 z^{58} + 383045166313 z^{60} + 87896770090 z^{54} + 7803214029356 z^{86} + 6301287800999 z^{94} \tag{26}$$

$$+ 217527660783 z^{115} + 7279523 z^{140} + 165746 z^{146} + 36655007315 z^{121} + 746870615 z^{131} + 294617997 z^{133} + 93794870375 z^{118} + 26203330757 z^{122} + 2872674173438 z^{102} + 10 z^{158} + 19783 z^{149} + 4356 z^{151} + 2205474 z^{142} + 378 z^{154} + 148209970987 z^{56} + 2348296148941 z^{70} + 4131352891288 z^{99} + 5468753945422 z^{96} + 40848 z^{148} + 12935448538 z^{124} + 882066320497 z^{109} + 1796130456 z^{129} + 4577790450782 z^{98} + 3062969619276 z^{72} + 361444830281 z^{113} + 3694265689677 z^{100} + 458712279521 z^{112} + 886 z^{153} + 5896688157356 z^{95} + 22562248 z^{138} + 166 z^{155} + 1185098 z^{143} + 325111 z^{145} + 1075094178825 z^{108} + 3272923326399 z^{101} + 2497757044183 z^{103} + 4 z^{159} + 472234295 z^{132} + 4724117551537 z^{76} + 871268813787 z^{64} + 65837165 z^{136} + 1742820206111 z^{68} + 5026272539007 z^{97} + z^{160} + 28 z^{157} + 66888672946 z^{53} + 4039953 z^{141} + 69340062364 z^{119} + z^{161} + 1252 z^{15} + z^{9} + 62 z^{12} + 503 z^{14}$$

> $C8 := 19 z^{11} + 2880 z^{16} + 285713256 z^{37} + 28108605379 z^{50} + 21052387 z^{31} + 427236430 z^{38} + 7918075515 z^{46} + 15157355804 z^{48} + 931197966 z^{40} + 4952142 z^{28} + 33328429 z^{32} + 4006568986 z^{44} + 124431643 z^{35} + 37825519072 z^{51} + 80992776 z^{34} + 52216931 z^{33} + 10998875191 z^{47} + 20723038000 z^{49} + 189398726 z^{36} + 13151248 z^{30} + 26835 z^{19} + 334231 z^{23} + 633414853 z^{39} + 1963248999 z^{42} + 8120988 z^{29} + 2980316 z^{27} + 99655 z^{21} + 50499724321 z^{52} + 2815973856 z^{43} + 1357667868 z^{41} + 1032565 z^{25} + 5655001946 z^{45} + 592790 z^{24} + 52411 z^{20} + 1767688 z^{26} + 13262 z^{18} + 184506 z^{22} + 6337 z^{17} + 4 z^{10} + 191 z^{13} + 7793509690628 z^{88} + 7005971485555 z^{92} + 110036672 z^{135} + 166108337266 z^{116} + 718032254708 z^{63} + 1550622403082 z^{106} + 83163 z^{147} + 7708303031031 z^{85} + 2151276069645 z^{104} + 6742814244981 z^{81} + 7519375814392 z^{90} + 18518094573 z^{123} + 281869703185 z^{114} + 1297485969724 z^{107} + 1483302969771 z^{67} + 2692871242647 z^{71} + 38829467 z^{137} + 12916099 z^{139} + 9331 z^{150} + 5157445093535 z^{77} + 5996134419111 z^{79} + 3455619681149 z^{73} + 7688524521792 z^{89} + 7290046670650 z^{91} + 7332317202179 z^{83} + 7061048862026 z^{82} + 1968 z^{152} + 2732367475 z^{128} + 625713 z^{144} + 305735574429 z^{59} + 476088521880 z^{61} + 6385145690071 z^{80} + 5584126565058 z^{78} + 1252279228882 z^{66} + 1165732822 z^{130} + 8929893881 z^{125} + 4104925184 z^{127} + 65 z^{156} + 114590622444 z^{55} + 6091314535 z^{126} + 1048753242179 z^{65} + 3866840615821 z^{74} + 1835238780538 z^{105} + 6673832362646 z^{93} + 7831964252014 z^{87} + 576220204190 z^{111} + 2031247014336 z^{69} + 4291652253063 z^{75} + 7549926722035 z^{84} + 190175994547 z^{57} + 50697647707 z^{120} + 125496238452 z^{117} + 181304759 z^{134} + 716519844425 z^{110} + 587021352221 z^{62} + 242091538988 z^{58} + 383045166313 z^{60} + 87896770090 z^{54} + 7803214029356 z^{86} + 6301287800999 z^{94} + 217527660783 z^{115} + 7279523 z^{140} + 165746 z^{146} + 36655007315 z^{121} + 746870615 z^{131} + 294617997 z^{133} + 93794870375 z^{118} + 26203330757 z^{122} + 2872674173438 z^{102} + 10 z^{158} + 19783 z^{149} + 4356 z^{151} + 2205474 z^{142} + 378 z^{154} + 148209970987 z^{56} + 2348296148941 z^{70} + 4131352891288 z^{99} + 5468753945422 z^{96} + 40848 z^{148} + 12935448538 z^{124} + 882066320497 z^{109} + 1796130456 z^{129} + 4577790450782 z^{98} + 3062969619276 z^{72} + 361444830281 z^{113} + 3694265689677 z^{100} + 458712279521 z^{112} + 886 z^{153} + 5896688157356 z^{95} + 22562248 z^{138} + 166 z^{155}$

$+ 1185098\, z^{143} + 325111\, z^{145} + 1075094178825\, z^{108} + 3272923326399\, z^{101} + 2497757044183\, z^{103} + 4\, z^{159} + 472234295\, z^{132} + 4724117551537\, z^{76} + 871268813787\, z^{64} + 65837165\, z^{136} + 1742820206111\, z^{68} + 5026272539007\, z^{97} + z^{160} + 28\, z^{157} + 66888672946\, z^{53} + 4039953\, z^{141} + 69340062364\, z^{119} + z^{161} + 1252\, z^{15} + z^{9} + 62\, z^{12} + 503\, z^{14}$

$$C8 := 1835238780538\, z^{105} + 1165732822\, z^{130} + 6385145690071\, z^{80} + 12935448538\, z^{124} + 7290046670650\, z^{91} + 22562248\, z^{138} + 1252279228882\, z^{66} + 2732367475\, z^{128} + 458712279521\, z^{112} + 361444830281\, z^{113} + 5026272539007\, z^{97} + 10\, z^{158} + 1796130456\, z^{129} + 7918075515\, z^{46} + 15157355804\, z^{48} + 931197966\, z^{40} + 2031247014336\, z^{69} + 4039953\, z^{141} + 378\, z^{154} + 4291652253063\, z^{75} + 87896770090\, z^{54} + 886\, z^{153} + 4952142\, z^{28} + 33328429\, z^{32} + 427236430\, z^{38} + 28\, z^{157} + 38829467\, z^{137} + 114590622444\, z^{55} + 1075094178825\, z^{108} + 6673832362646\, z^{93} + 99655\, z^{21} + 50499724321\, z^{52} + 2815973856\, z^{43} + 592790\, z^{24} + 52411\, z^{20} + 1767688\, z^{26} + 50697647707\, z^{120} + 1357667868\, z^{41} + 1032565\, z^{25} + 5655001946\, z^{45} + 20723038000\, z^{49} + 189398726\, z^{36} + 13151248\, z^{30} + 285713256\, z^{37} + 28108605379\, z^{50} + 21052387\, z^{31} + 1963248999\, z^{42} + 8120988\, z^{29} + 2980316\, z^{27} + 66888672946\, z^{53} + 19783\, z^{149} + 181304759\, z^{134} + 1185098\, z^{143} + 294617997\, z^{133} + 93794870375\, z^{118} + 7549926722035\, z^{84} + 2348296148941\, z^{70} + 281869703185\, z^{114} + 9331\, z^{150} + 19\, z^{11} + 2880\, z^{16} + 6337\, z^{17} + 4\, z^{10} + 191\, z^{13} + 1252\, z^{15} + z^{9} + 62\, z^{12} + 503\, z^{14} + 7061048862026\, z^{82} + 13262\, z^{18} + 184506\, z^{22} + 7332317202179\, z^{83} + 110036672\, z^{135} + 5468753945422\, z^{96} + 3866840615821\, z^{74} + 576220204190\, z^{111} + 472234295\, z^{132} + 4104925184\, z^{127} + 36655007315\, z^{121} + 383045166313\, z^{60} + 40848\, z^{148} + 7831964252014\, z^{87} + 1048753242179\, z^{65} + 1550622403082\, z^{106} + 65837165\, z^{136} + 4356\, z^{151} + 190175994547\, z^{57} + 7005971485555\, z^{92} + 476088521880\, z^{61} + 217527660783\, z^{115} + 2205474\, z^{142} + 587021352221\, z^{62} + 1742820206111\, z^{68} + 65\, z^{156} + 242091538988\, z^{58} + 166108337266\, z^{116} + 83163\, z^{147} + 4006568986\, z^{44} + 124431643\, z^{35} + 37825519072\, z^{51} + 80992776\, z^{34} + 52216931\, z^{33} + 10998875191\, z^{47} + 6742814244981\, z^{81} + 718032254708\, z^{63} + 746870615\, z^{131} + 305735574429\, z^{59} + 325111\, z^{145} + 12916099\, z^{139} + 2692871242647\, z^{71} + 1297485969724\, z^{107} + 5584126565058\, z^{78} + 3455619681149\, z^{73} + 125496238452\, z^{117} + 5996134419111\, z^{79} + 4577790450782\, z^{98} + 6301287800999\, z^{94} + 2151276069645\, z^{104} + 7803214029356\, z^{86} + 69340062364\, z^{119} + 26835\, z^{19} + 334231\, z^{23} + 633414853\, z^{39} + 4724117551537\, z^{76} + 7279523\, z^{140} + 2497757044183\, z^{103} + 1483302969771\, z^{67} + z^{161} + 6091314535\, z^{126} + 871268813787\, z^{64} + 625713\, z^{144} + 5896688157356\, z^{95} + 4\, z^{159} + 18518094573\, z^{123} + 3272923326399\, z^{101} + 3694265689677\, z^{100} + 8929893881\, z^{125} + 4131352891288\, z^{99} + 5157445093535\, z^{77} + 26203330757\, z^{122} + 7708303031031\, z^{85} + 148209970987\, z^{56} \tag{27}$$

$$+ 3062969619276\,z^{72} + 2872674173438\,z^{102} + z^{160} + 1968\,z^{152} + 166\,z^{155} + 165746\,z^{146}$$
$$+ 7793509690628\,z^{88} + 716519844425\,z^{110} + 882066320497\,z^{109} + 7519375814392\,z^{90}$$
$$+ 7688524521792\,z^{89}$$

> ***C***(*z*) := ***expand***(***C0*** + ***C2*** + ***C4*** + ***C6*** + ***C8***);

$$C(z) := 1835238780538\,z^{105} + 1165732822\,z^{130} + z + 6385145690071\,z^{80} + 12935448538\,z^{124} \tag{28}$$
$$+ 7290046670650\,z^{91} + 22562248\,z^{138} + 1252279228882\,z^{66} + 2732367475\,z^{128}$$
$$+ 458712279521\,z^{112} + 361444830281\,z^{113} + 5026272539007\,z^{97} + 10\,z^{158}$$
$$+ 1796130456\,z^{129} + 7918075585\,z^{46} + 15157355826\,z^{48} + 931198851\,z^{40}$$
$$+ 2031247014336\,z^{69} + 4039953\,z^{141} + 378\,z^{154} + 4291652253063\,z^{75} + 87896770090\,z^{54}$$
$$+ 886\,z^{153} + 4957326\,z^{28} + 33332880\,z^{32} + 427238011\,z^{38} + 28\,z^{157} + 38829467\,z^{137}$$
$$+ 114590622444\,z^{55} + 1075094178825\,z^{108} + 6673832362646\,z^{93} + 102266\,z^{21}$$
$$+ 50499724322\,z^{52} + 2815974153\,z^{43} + 596841\,z^{24} + 54540\,z^{20} + 1772502\,z^{26}$$
$$+ 50697647707\,z^{120} + z^{3} + z^{4} + 1357668510\,z^{41} + 1037052\,z^{25} + 5655002067\,z^{45}$$
$$+ 20723038013\,z^{49} + 189401224\,z^{36} + 13156301\,z^{30} + 285715287\,z^{37} + 28108605385\,z^{50}$$
$$+ 21057210\,z^{31} + 2\,z^{5} + 1963249435\,z^{42} + 8126193\,z^{29} + 2985389\,z^{27} + 66888672947\,z^{53}$$
$$+ 19783\,z^{149} + 181304759\,z^{134} + 1185098\,z^{143} + 294617997\,z^{133} + 93794870375\,z^{118}$$
$$+ 7549926722035\,z^{84} + 2348296148941\,z^{70} + 281869703185\,z^{114} + 9331\,z^{150} + 85\,z^{11}$$
$$+ 3581\,z^{16} + 7320\,z^{17} + 37\,z^{10} + 392\,z^{13} + 6\,z^{7} + 1739\,z^{15} + 2\,z^{6} + 9\,z^{8} + 20\,z^{9} + 176\,z^{12}$$
$$+ 819\,z^{14} + 7061048862026\,z^{82} + 14568\,z^{18} + 187598\,z^{22} + 7332317202179\,z^{83}$$
$$+ 110036672\,z^{135} + 5468753945422\,z^{96} + 3866840615821\,z^{74} + 576220204190\,z^{111}$$
$$+ 472234295\,z^{132} + 4104925184\,z^{127} + 36655007315\,z^{121} + 383045166313\,z^{60}$$
$$+ 40848\,z^{148} + 7831964252014\,z^{87} + 1048753242179\,z^{65} + 1550622403082\,z^{106}$$
$$+ 65837165\,z^{136} + 4356\,z^{151} + 190175994547\,z^{57} + 7005971485555\,z^{92}$$
$$+ 476088521880\,z^{61} + 217527660783\,z^{115} + 2205474\,z^{142} + 587021352221\,z^{62}$$
$$+ 1742820206111\,z^{68} + 65\,z^{156} + 242091538988\,z^{58} + 166108337266\,z^{116} + 83163\,z^{147}$$
$$+ 4006569175\,z^{44} + 124434670\,z^{35} + 37825519075\,z^{51} + 80996299\,z^{34} + 52220962\,z^{33}$$
$$+ 10998875234\,z^{47} + 6742814244981\,z^{81} + 718032254708\,z^{63} + 746870615\,z^{131}$$
$$+ 305735574429\,z^{59} + 325111\,z^{145} + 12916099\,z^{139} + 2692871242647\,z^{71}$$
$$+ 1297485969724\,z^{107} + 5584126565058\,z^{78} + 3455619681149\,z^{73} + 125496238452\,z^{117}$$
$$+ 5996134419111\,z^{79} + 4577790450782\,z^{98} + 6301287800999\,z^{94} + 2151276069645\,z^{104}$$
$$+ 7803214029356\,z^{86} + 69340062364\,z^{119} + 28538\,z^{19} + 337829\,z^{23} + 633416064\,z^{39}$$
$$+ 4724117551537\,z^{76} + 7279523\,z^{140} + 2497757044183\,z^{103} + 1483302969771\,z^{67} + z^{161}$$
$$+ 6091314535\,z^{126} + 871268813787\,z^{64} + 625713\,z^{144} + 5896688157356\,z^{95} + 4\,z^{159}$$
$$+ 18518094573\,z^{123} + 3272923326399\,z^{101} + 3694265689677\,z^{100} + 8929893881\,z^{125}$$
$$+ 4131352891288\,z^{99} + 5157445093535\,z^{77} + 26203330757\,z^{122} + 7708303031031\,z^{85}$$
$$+ 148209970987\,z^{56} + 3062969619276\,z^{72} + 2872674173438\,z^{102} + z^{160} + 1968\,z^{152}$$

$+ 166 z^{155} + 165746 z^{146} + 7793509690628 z^{88} + 716519844425 z^{110}$
$+ 882066320497 z^{109} + 7519375814392 z^{90} + 7688524521792 z^{89}$

>

> **Perhitungan *Bicentered Tree***

> $T_{-1}(z) := 1$

$$T_{-1} := z \rightarrow 1 \tag{1}$$

> $T0(z) := 1 + z$

$$T0 := z \rightarrow 1 + z \tag{2}$$

> $\boldsymbol{a = expand\left(T0(z) - T_{-1}(z)\right);}$

$$a = z \tag{3}$$

> $a(z) := z$

$$a := z \rightarrow z \tag{4}$$

> $a(z^2) := expand(a(z^2));$

$$a(z^2) := z^2 \tag{5}$$

> $\boldsymbol{B1(z) = expand\left(\frac{a(z)^2 + a(z^2)}{2}\right);}$

$$a^2 = z^2 \tag{6}$$

> $B1(z) := z^2$

$$B1 := z \rightarrow z^2 \tag{7}$$

> $T1(z) := 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$

$$T1 := z \rightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 \tag{8}$$

> $\boldsymbol{b = expand(T1(z) - T0(z));}$

$$b = z^2 + z^3 + z^4 \tag{9}$$

> $b(z) := z^2 + z^3 + z^4$

$$b := z \rightarrow z^2 + z^3 + z^4 \tag{10}$$

> $b(z^2) := expand(b(z^2));$

$$b(z^2) := z^4 + z^6 + z^8 \tag{11}$$

> $\boldsymbol{B3(z) = expand\left(\frac{b(z)^2 + b(z^2)}{2}\right);}$

$$B3(z) = z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + z^8 \tag{12}$$

> $B3(z) := z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + z^8$

$$B3 := z \rightarrow z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7 + z^8 \tag{13}$$

> $T2(z) := 1 + z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13}$

$$T2 := z \rightarrow 1 + z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13} \tag{14}$$

> $\boldsymbol{c = expand(T2(z) - T1(z));}$

$$c = z^3 + 2z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13} \tag{15}$$

> $c(z) := z^3 + 2z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13}$

$$c := z \rightarrow z^3 + 2z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 5z^7 + 4z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12} + z^{13} \tag{16}$$

> $c(z^2) := expand(c(z^2));$

$$c(z^2) := z^6 + 2z^8 + 4z^{10} + 4z^{12} + 5z^{14} + 4z^{16} + 4z^{18} + 3z^{20} + 2z^{22} + z^{24} + z^{26} \tag{17}$$

$$> \; B5(z) = expand\left(\frac{c(z)^2 + c(z^2)}{2}\right);$$

$$B5(z) = 2z^7 + 55z^{14} + 53z^{16} + 40z^{18} + 23z^{20} + 10z^{22} + 3z^{24} + z^{26} + 45z^{17} + 29z^{19} + 53z^{15} + 12z^9 + 23z^{10} + 30z^{11} + 42z^{12} + 47z^{13} + 14z^{21} + 5z^{23} + z^{25} + z^6 + 7z^8 \quad \textbf{(18)}$$

$$> \; B5(z) := 2z^7 + 55z^{14} + 53z^{16} + 40z^{18} + 23z^{20} + 10z^{22} + 3z^{24} + z^{26} + 45z^{17} + 29z^{19} + 53z^{15} + 12z^9 + 23z^{10} + 30z^{11} + 42z^{12} + 47z^{13} + 14z^{21} + 5z^{23} + z^{25} + z^6 + 7z^8$$

$$B5 := z \rightarrow 2z^7 + 55z^{14} + 53z^{16} + 40z^{18} + 23z^{20} + 10z^{22} + 3z^{24} + z^{26} + 45z^{17} + 29z^{19} + 53z^{15} + 12z^9 + 23z^{10} + 30z^{11} + 42z^{12} + 47z^{13} + 14z^{21} + 5z^{23} + z^{25} + z^6 + 7z^8 \quad \textbf{(19)}$$

$$> \; T3(z) := 1 + z + 184z^{13} + 432z^{17} + 601z^{23} + 551z^{19} + 514z^{25} + 312z^{28} + 20z^{35} + 6z^{37} + 128z^{31} + 238z^{29} + 37z^{34} + 3z^{38} + 89z^{32} + 4z^4 + z^2 + 2z^3 + 99z^{11} + 570z^{24} + 594z^{20} + 453z^{26} + 498z^{18} + 239z^{14} + 369z^{16} + 624z^{22} + z^{40} + 47z^9 + 137z^{12} + 56z^{33} + 300z^{15} + 12z^{36} + 181z^{30} + z^{39} + 378z^{27} + 614z^{21} + 31z^8 + 12z^6 + 7z^5 + 20z^7 + 70z^{10}$$

$$T3 := z \rightarrow 1 + z + 4z^4 + 2z^3 + z^2 + 453z^{26} + 498z^{18} + 239z^{14} + 56z^{33} + 300z^{15} + 12z^{36} + 181z^{30} + 378z^{27} + 614z^{21} + z^{40} + z^{39} + 432z^{17} + 601z^{23} + 551z^{19} + 514z^{25} + 312z^{28} + 20z^{35} + 6z^{37} + 128z^{31} + 238z^{29} + 37z^{34} + 3z^{38} + 89z^{32} + 137z^{12} + 184z^{13} + 7z^5 + 12z^6 + 20z^7 + 31z^8 + 47z^9 + 70z^{10} + 99z^{11} + 369z^{16} + 624z^{22} + 570z^{24} + 594z^{20} \quad \textbf{(20)}$$

$$> \; d = expand(T3(z) - T2(z));$$

$$d = z^4 + 3z^5 + 15z^7 + 239z^{14} + 369z^{16} + 498z^{18} + 594z^{20} + 624z^{22} + 570z^{24} + 453z^{26} + 56z^{33} + 12z^{36} + 181z^{30} + 378z^{27} + z^{40} + z^{39} + 312z^{28} + 20z^{35} + 6z^{37} + 128z^{31} + 238z^{29} + 37z^{34} + 3z^{38} + 89z^{32} + 432z^{17} + 551z^{19} + 300z^{15} + 43z^9 + 67z^{10} + 97z^{11} + 136z^{12} + 183z^{13} + 614z^{21} + 601z^{23} + 514z^{25} + 8z^6 + 27z^8 \quad \textbf{(21)}$$

$$> \; d(z) := z^4 + 3z^5 + 15z^7 + 239z^{14} + 369z^{16} + 498z^{18} + 594z^{20} + 624z^{22} + 570z^{24} + 453z^{26} + 56z^{33} + 12z^{36} + 181z^{30} + 378z^{27} + z^{40} + z^{39} + 312z^{28} + 20z^{35} + 6z^{37} + 128z^{31} + 238z^{29} + 37z^{34} + 3z^{38} + 89z^{32} + 432z^{17} + 551z^{19} + 300z^{15} + 43z^9 + 67z^{10} + 97z^{11} + 136z^{12} + 183z^{13} + 614z^{21} + 601z^{23} + 514z^{25} + 8z^6 + 27z^8$$

$$d := z \rightarrow z^4 + 453z^{26} + 498z^{18} + 239z^{14} + 56z^{33} + 300z^{15} + 12z^{36} + 181z^{30} + 378z^{27} + 614z^{21} + z^{40} + z^{39} + 432z^{17} + 601z^{23} + 551z^{19} + 514z^{25} + 312z^{28} + 20z^{35} + 6z^{37} + 128z^{31} + 238z^{29} + 37z^{34} + 3z^{38} + 89z^{32} + 136z^{12} + 183z^{13} + 3z^5 + 8z^6 + 15z^7 + 27z^8 + 43z^9 + 67z^{10} + 97z^{11} + 369z^{16} + 624z^{22} + 570z^{24} + 594z^{20} \quad \textbf{(22)}$$

$$> \; d(z^2) := expand(d(z^2));$$

$$d(z^2) := 453z^{52} + 12z^{72} + 181z^{60} + 378z^{54} + 614z^{42} + z^{80} + 56z^{66} + 15z^{14} + 27z^{16} + 43z^{18} + 67z^{20} + 97z^{22} + 136z^{24} + 183z^{26} + 498z^{36} + 300z^{30} + 594z^{40} + 239z^{28} + 432z^{34} + 551z^{38} + 369z^{32} + z^{78} + 601z^{46} + 514z^{50} + 37z^{68} + 89z^{64} + 3z^{76} + 312z^{56} + 6z^{74} + 128z^{62} + 238z^{58} + 20z^{70} + 624z^{44} + 570z^{48} + 3z^{10} + 8z^{12} + z^8 \quad \textbf{(23)}$$

$$> \; B7(z) = expand\left(\frac{d(z)^2 + d(z^2)}{2}\right);$$

$$B7(z) = 927589 z^{52} + 454 z^{72} + 136438 z^{60} + 648529 z^{54} + 1842018 z^{42} + z^{80} + 12816 z^{66} + 532 z^{14} + 1986 z^{16} + 6086 z^{18} + 16047 z^{20} + 37433 z^{22} + 78654 z^{24} + 150668 z^{26} + 1861117 z^{43} + 1805231 z^{45} + 1633152 z^{47} + 1375925 z^{49} + 1791679 z^{41} + 847 z^{71} + 225 z^{73} + 50 z^{75} + 9 z^{77} + z^{79} + 782879 z^{33} + 1212686 z^{36} + 432190 z^{30} + 201860 z^{27} + 1714144 z^{40} + 1611919 z^{39} + 265340 z^{28} + 1065997 z^{35} + 1355796 z^{37} + 536232 z^{31} + 341714 z^{29} + 921663 z^{34} + 1491120 z^{38} + 653883 z^{32} + 1077599 z^{51} + 782892 z^{53} + 526340 z^{55} + 326556 z^{57} + 186385 z^{59} + 3533 z^{17} + 10021 z^{19} + 1047 z^{15} + 4 z^{78} + 1732575 z^{46} + 1229310 z^{50} + 4752 z^{68} + 31085 z^{64} + 24 z^{76} + 419060 z^{56} + 114 z^{74} + 68252 z^{62} + 249511 z^{58} + 1566 z^{70} + 1849226 z^{44} + 1512942 z^{48} + 3 z^{9} + 14 z^{10} + 39 z^{11} + 108 z^{12} + 244 z^{13} + 24812 z^{21} + 54866 z^{23} + 109976 z^{25} + z^{8} + 97497 z^{61} + 46541 z^{63} + 20169 z^{65} + 7878 z^{67} + 2749 z^{69} \tag{24}$$

> $B7(z) := 927589 z^{52} + 454 z^{72} + 136438 z^{60} + 648529 z^{54} + 1842018 z^{42} + z^{80} + 12816 z^{66} + 532 z^{14} + 1986 z^{16} + 6086 z^{18} + 16047 z^{20} + 37433 z^{22} + 78654 z^{24} + 150668 z^{26} + 1861117 z^{43} + 1805231 z^{45} + 1633152 z^{47} + 1375925 z^{49} + 1791679 z^{41} + 847 z^{71} + 225 z^{73} + 50 z^{75} + 9 z^{77} + z^{79} + 782879 z^{33} + 1212686 z^{36} + 432190 z^{30} + 201860 z^{27} + 1714144 z^{40} + 1611919 z^{39} + 265340 z^{28} + 1065997 z^{35} + 1355796 z^{37} + 536232 z^{31} + 341714 z^{29} + 921663 z^{34} + 1491120 z^{38} + 653883 z^{32} + 1077599 z^{51} + 782892 z^{53} + 526340 z^{55} + 326556 z^{57} + 186385 z^{59} + 3533 z^{17} + 10021 z^{19} + 1047 z^{15} + 4 z^{78} + 1732575 z^{46} + 1229310 z^{50} + 4752 z^{68} + 31085 z^{64} + 24 z^{76} + 419060 z^{56} + 114 z^{74} + 68252 z^{62} + 249511 z^{58} + 1566 z^{70} + 1849226 z^{44} + 1512942 z^{48} + 3 z^{9} + 14 z^{10} + 39 z^{11} + 108 z^{12} + 244 z^{13} + 24812 z^{21} + 54866 z^{23} + 109976 z^{25} + z^{8} + 97497 z^{61} + 46541 z^{63} + 20169 z^{65} + 7878 z^{67} + 2749 z^{69}$

$$B7 := z \to 46541 z^{63} + 1791679 z^{41} + 1861117 z^{43} + 2749 z^{69} + 326556 z^{57} + 1229310 z^{50} + 419060 z^{56} + 4752 z^{68} + 24 z^{76} + 1842018 z^{42} + 454 z^{72} + 136438 z^{60} + 50 z^{75} + 1077599 z^{51} + 1805231 z^{45} + 526340 z^{55} + z^{80} + 4 z^{78} + 150668 z^{26} + 6086 z^{18} + 532 z^{14} + 782879 z^{33} + 1047 z^{15} + 1212686 z^{36} + 432190 z^{30} + 201860 z^{27} + 24812 z^{21} + 114 z^{74} + 68252 z^{62} + 1375925 z^{49} + 782892 z^{53} + z^{79} + 20169 z^{65} + 249511 z^{58} + 1714144 z^{40} + 1611919 z^{39} + 3533 z^{17} + 54866 z^{23} + 10021 z^{19} + 109976 z^{25} + 265340 z^{28} + 1065997 z^{35} + 1355796 z^{37} + 536232 z^{31} + 341714 z^{29} + 921663 z^{34} + 1491120 z^{38} + 653883 z^{32} + 108 z^{12} + 244 z^{13} + z^{8} + 3 z^{9} + 14 z^{10} + 39 z^{11} + 7878 z^{67} + 847 z^{71} + 31085 z^{64} + 225 z^{73} + 1986 z^{16} + 37433 z^{22} + 78654 z^{24} + 16047 z^{20} + 1566 z^{70} + 1633152 z^{47} + 186385 z^{59} + 97497 z^{61} + 648529 z^{54} + 1732575 z^{46} + 1512942 z^{48} + 927589 z^{52} + 9 z^{77} + 1849226 z^{44} + 12816 z^{66} \tag{25}$$

> $T4(z) := 1 + z + z^{121} + 1344 z^{13} + 12104 z^{17} + 231801 z^{23} + 33883 z^{19} + 567206 z^{25} + 2000536 z^{28} + 26088244 z^{35} + 49418998 z^{37} + 6407683 z^{31} + 2980554 z^{29} + 18657905 z^{34} + 66951451 z^{38} + 9246830 z^{32} + 4 z^{4} + 1604 z^{112} + 758 z^{113} + 154 z^{115} + 62 z^{116} + 10 z^{118} + 4 z^{119} + 1973755292 z^{77} + 1463215476 z^{79} + 156284730 z^{41} + 260865858 z^{43} + 639939517 z^{47} + 940236752 z^{49} + 1784589063 z^{53} + 2304400735 z^{55}$

$$+ 3371001341 z^{59} + 3816383212 z^{61} + 4276971739 z^{65} + 4229607116 z^{67} + 3599155257 z^{71} + 3092740855 z^{73} + z^{2} + 331715843 z^{44} + 4277663720 z^{66} + 202984042 z^{42} + 3356383912 z^{72} + 3606730433 z^{60} + 2038928979 z^{54} + 109250394 z^{90} + 1030602778 z^{81} + 4132169661 z^{63} + 2 z^{3} + 415 z^{11} + 364555 z^{24} + 55706 z^{20} + 872727 z^{26} + 20354 z^{18} + 2365 z^{14} + 7106 z^{16} + 145729 z^{22} + 119063149 z^{40} + z^{120} + 27 z^{117} + 1323523938 z^{51} + 3994067586 z^{69} + 2848892771 z^{57} + 2532213546 z^{75} + 552046535 z^{84} + 158476 z^{105} + 3353 z^{111} + 39922778 z^{93} + 261713408 z^{87} + 808547 z^{102} + 338 z^{114} + 12677964 z^{96} + 121 z^{9} + 749 z^{12} + 13204526 z^{33} + 4129 z^{15} + 36095102 z^{36} + 4393287 z^{30} + 89755449 z^{39} + 1328545 z^{27} + 90628 z^{21} + 63 z^{8} + 16 z^{6} + 3469135 z^{99} + 417359802 z^{45} + 25584 z^{108} + 8 z^{5} + 33 z^{7} + 225 z^{10} + 148315264 z^{89} + 79298004 z^{91} + 56695196 z^{92} + 27675367 z^{94} + 18885015 z^{95} + 8372800 z^{97} + 5435626 z^{98} + 2174395 z^{100} + 1338790 z^{101} + 479339 z^{103} + 278280 z^{104} + 88204 z^{106} + 48126 z^{107} + 13348 z^{109} + 6744 z^{110} + 848181768 z^{82} + 688882553 z^{83} + 436439448 z^{85} + 340324807 z^{86} + 198431393 z^{88} + 1235964517 z^{80} + 1710204982 z^{78} + 519559381 z^{46} + 1121537006 z^{50} + 2576241555 z^{56} + 3813878148 z^{70} + 2815570112 z^{74} + 3993437445 z^{62} + 3116054839 z^{58} + 4134086103 z^{68} + 2249523074 z^{76} + 4227813312 z^{64} + 779843029 z^{48} + 1545167948 z^{52}$$

$$T4 := z \rightarrow 1 + z + 4132169661 z^{63} + 156284730 z^{41} + 260865858 z^{43} + 3994067586 z^{69} + 2848892771 z^{57} + 6744 z^{110} + 848181768 z^{82} + 688882553 z^{83} + 808547 z^{102} + 2174395 z^{100} + 88204 z^{106} + 48126 z^{107} + 4 z^{4} + 2 z^{3} + 1121537006 z^{50} + 2576241555 z^{56} + 4134086103 z^{68} + 2249523074 z^{76} + z^{2} + 202984042 z^{42} + 198431393 z^{88} + 1338790 z^{101} + 479339 z^{103} + 3356383912 z^{72} + 3606730433 z^{60} + 2532213546 z^{75} + 1323523938 z^{51} + 417359802 z^{45} + 2304400735 z^{55} + 27 z^{117} + 3469135 z^{99} + 1235964517 z^{80} + 1710204982 z^{78} + 872727 z^{26} + 20354 z^{18} + 2365 z^{14} + 13204526 z^{33} + 4129 z^{15} + 36095102 z^{36} + 4393287 z^{30} + 1328545 z^{27} + 90628 z^{21} + 2815570112 z^{74} + 3993437445 z^{62} + 154 z^{115} + 62 z^{116} + 940236752 z^{49} + 1784589063 z^{53} + 1463215476 z^{79} + 4276971739 z^{65} + 3116054839 z^{58} + 1604 z^{112} + 39922778 z^{93} + 261713408 z^{87} + 109250394 z^{90} + 1030602778 z^{81} + 758 z^{113} + 119063149 z^{40} + 89755449 z^{39} + 12104 z^{17} + 231801 z^{23} + 33883 z^{19} + 567206 z^{25} + 2000536 z^{28} + 26088244 z^{35} + 49418998 z^{37} + 6407683 z^{31} + 2980554 z^{29} + 18657905 z^{34} + 66951451 z^{38} + 9246830 z^{32} + 749 z^{12} + 1344 z^{13} + 8 z^{5} + 16 z^{6} + 33 z^{7} + 63 z^{8} + 121 z^{9} + 225 z^{10} + 415 z^{11} + 4229607116 z^{67} + 3599155257 z^{71} + z^{121} + 4227813312 z^{64} + 79298004 z^{91} + 3092740855 z^{73} + 25584 z^{108} + 18885015 z^{95} + 13348 z^{109} + 338 z^{114} + 12677964 z^{96} + z^{120} + 7106 z^{16} + 145729 z^{22} + 364555 z^{24} + 55706 z^{20} + 10 z^{118} + 552046535 z^{84} + 158476 z^{105} + 148315264 z^{89} + 8372800 z^{97} + 5435626 z^{98} + 436439448 z^{85} + 340324807 z^{86} + 56695196 z^{92} + 27675367 z^{94} + 3813878148 z^{70} + 639939517 z^{47} + 3371001341 z^{59} + 3816383212 z^{61} \quad \mathbf{(26)}$$

$+ 2038928979 z^{54} + 519559381 z^{46} + 779843029 z^{48} + 1545167948 z^{52} + 4 z^{119}$
$+ 1973755292 z^{77} + 331715843 z^{44} + 4277663720 z^{66} + 3353 z^{111} + 278280 z^{104}$

> **e := expand(T4(z) − T3(z));**

$e := 1545167948 z^{52} + 3356383912 z^{72} + 3606730433 z^{60} + 2038928979 z^{54} + 202984042 z^{42} + 1235964517 z^{80} + 25584 z^{108} + 18885015 z^{95} + 13348 z^{109} + 338 z^{114} + 12677964 z^{96} + z^{120} + 10 z^{118} + 552046535 z^{84} + 158476 z^{105} + 148315264 z^{89} + 8372800 z^{97} + 5435626 z^{98} + 436439448 z^{85} + 340324807 z^{86} + 56695196 z^{92} + 27675367 z^{94} + 4 z^{119} + 3353 z^{111} + 278280 z^{104} + 4277663720 z^{66} + z^{5} + 13 z^{7} + 2126 z^{14} + 6737 z^{16} + 19856 z^{18} + 55112 z^{20} + 145105 z^{22} + 363985 z^{24} + 872274 z^{26} + 260865858 z^{43} + 417359802 z^{45} + 639939517 z^{47} + 940236752 z^{49} + 156284730 z^{41} + 3599155257 z^{71} + 3092740855 z^{73} + 2532213546 z^{75} + 1973755292 z^{77} + 1463215476 z^{79} + 13204470 z^{33} + 36095090 z^{36} + 4393106 z^{30} + 1328167 z^{27} + 119063148 z^{40} + 89755448 z^{39} + 2000224 z^{28} + 26088224 z^{35} + 49418992 z^{37} + 6407555 z^{31} + 2980316 z^{29} + 18657868 z^{34} + 66951448 z^{38} + 9246741 z^{32} + 1323523938 z^{51} + 1784589063 z^{53} + 2304400735 z^{55} + 2848892771 z^{57} + 3371001341 z^{59} + 11672 z^{17} + 33332 z^{19} + 6744 z^{110} + 3829 z^{15} + 1710204982 z^{78} + 519559381 z^{46} + 1121537006 z^{50} + 4134086103 z^{68} + 4227813312 z^{64} + 2249523074 z^{76} + 2576241555 z^{56} + 2815570112 z^{74} + 3993437445 z^{62} + 3116054839 z^{58} + 3813878148 z^{70} + 331715843 z^{44} + 779843029 z^{48} + 74 z^{9} + 155 z^{10} + 316 z^{11} + 612 z^{12} + 1160 z^{13} + 90014 z^{21} + 231200 z^{23} + 566692 z^{25} + 4 z^{6} + 32 z^{8} + 109250394 z^{90} + 1030602778 z^{81} + 758 z^{113} + z^{121} + 79298004 z^{91} + 3816383212 z^{61} + 4132169661 z^{63} + 4276971739 z^{65} + 4229607116 z^{67} + 3994067586 z^{69} + 808547 z^{102} + 2174395 z^{100} + 88204 z^{106} + 198431393 z^{88} + 1338790 z^{101} + 479339 z^{103} + 48126 z^{107} + 848181768 z^{82} + 688882553 z^{83} + 27 z^{117} + 154 z^{115} + 62 z^{116} + 1604 z^{112} + 39922778 z^{93} + 261713408 z^{87} + 3469135 z^{99}$ **(27)**

> $e(z) := 1545167948 z^{52} + 3356383912 z^{72} + 3606730433 z^{60} + 2038928979 z^{54} + 202984042 z^{42} + 1235964517 z^{80} + 25584 z^{108} + 18885015 z^{95} + 13348 z^{109} + 338 z^{114} + 12677964 z^{96} + z^{120} + 10 z^{118} + 552046535 z^{84} + 158476 z^{105} + 148315264 z^{89} + 8372800 z^{97} + 5435626 z^{98} + 436439448 z^{85} + 340324807 z^{86} + 56695196 z^{92} + 27675367 z^{94} + 4 z^{119} + 3353 z^{111} + 278280 z^{104} + 4277663720 z^{66} + z^{5} + 13 z^{7} + 2126 z^{14} + 6737 z^{16} + 19856 z^{18} + 55112 z^{20} + 145105 z^{22} + 363985 z^{24} + 872274 z^{26} + 260865858 z^{43} + 417359802 z^{45} + 639939517 z^{47} + 940236752 z^{49} + 156284730 z^{41} + 3599155257 z^{71} + 3092740855 z^{73} + 2532213546 z^{75} + 1973755292 z^{77} + 1463215476 z^{79} + 13204470 z^{33} + 36095090 z^{36} + 4393106 z^{30} + 1328167 z^{27} + 119063148 z^{40} + 89755448 z^{39} + 2000224 z^{28} + 26088224 z^{35} + 49418992 z^{37} + 6407555 z^{31} + 2980316 z^{29} + 18657868 z^{34} + 66951448 z^{38} + 9246741 z^{32} + 1323523938 z^{51} + 1784589063 z^{53} + 2304400735 z^{55} + 2848892771 z^{57} + 3371001341 z^{59} + 11672 z^{17} + 33332 z^{19} + 6744 z^{110} + 3829 z^{15} + 1710204982 z^{78}$

$+ 519559381 z^{46} + 1121537006 z^{50} + 4134086103 z^{68} + 4227813312 z^{64}$
$+ 2249523074 z^{76} + 2576241555 z^{56} + 2815570112 z^{74} + 3993437445 z^{62}$
$+ 3116054839 z^{58} + 3813878148 z^{70} + 331715843 z^{44} + 779843029 z^{48} + 74 z^{9} + 155 z^{10}$
$+ 316 z^{11} + 612 z^{12} + 1160 z^{13} + 90014 z^{21} + 231200 z^{23} + 566692 z^{25} + 4 z^{6} + 32 z^{8}$
$+ 109250394 z^{90} + 1030602778 z^{81} + 758 z^{113} + z^{121} + 79298004 z^{91} + 3816383212 z^{61}$
$+ 4132169661 z^{63} + 4276971739 z^{65} + 4229607116 z^{67} + 3994067586 z^{69} + 808547 z^{102}$
$+ 2174395 z^{100} + 88204 z^{106} + 198431393 z^{88} + 1338790 z^{101} + 479339 z^{103} + 48126 z^{107}$
$+ 848181768 z^{82} + 688882553 z^{83} + 27 z^{117} + 154 z^{115} + 62 z^{116} + 1604 z^{112}$
$+ 39922778 z^{93} + 261713408 z^{87} + 3469135 z^{99}$

$e := z \rightarrow 4132169661 z^{63} + 156284730 z^{41} + 260865858 z^{43} + 3994067586 z^{69}$ **(28)**
$+ 2848892771 z^{57} + 6744 z^{110} + 848181768 z^{82} + 688882553 z^{83} + 808547 z^{102}$
$+ 2174395 z^{100} + 88204 z^{106} + 48126 z^{107} + 1121537006 z^{50} + 2576241555 z^{56}$
$+ 4134086103 z^{68} + 2249523074 z^{76} + 202984042 z^{42} + 198431393 z^{88} + 1338790 z^{101}$
$+ 479339 z^{103} + 3356383912 z^{72} + 3606730433 z^{60} + 2532213546 z^{75} + 1323523938 z^{51}$
$+ 417359802 z^{45} + 2304400735 z^{55} + 27 z^{117} + 3469135 z^{99} + 1235964517 z^{80}$
$+ 1710204982 z^{78} + 872274 z^{26} + 19856 z^{18} + 2126 z^{14} + 13204470 z^{33} + 3829 z^{15}$
$+ 36095090 z^{36} + 4393106 z^{30} + 1328167 z^{27} + 90014 z^{21} + 2815570112 z^{74}$
$+ 3993437445 z^{62} + 154 z^{115} + 62 z^{116} + 940236752 z^{49} + 1784589063 z^{53}$
$+ 1463215476 z^{79} + 4276971739 z^{65} + 3116054839 z^{58} + 1604 z^{112} + 39922778 z^{93}$
$+ 261713408 z^{87} + 109250394 z^{90} + 1030602778 z^{81} + 758 z^{113} + 119063148 z^{40}$
$+ 89755448 z^{39} + 11672 z^{17} + 231200 z^{23} + 33332 z^{19} + 566692 z^{25} + 2000224 z^{28}$
$+ 26088224 z^{35} + 49418992 z^{37} + 6407555 z^{31} + 2980316 z^{29} + 18657868 z^{34}$
$+ 66951448 z^{38} + 9246741 z^{32} + 612 z^{12} + 1160 z^{13} + z^{5} + 4 z^{6} + 13 z^{7} + 32 z^{8} + 74 z^{9}$
$+ 155 z^{10} + 316 z^{11} + 4229607116 z^{67} + 3599155257 z^{71} + z^{121} + 4227813312 z^{64}$
$+ 79298004 z^{91} + 3092740855 z^{73} + 25584 z^{108} + 18885015 z^{95} + 13348 z^{109} + 338 z^{114}$
$+ 12677964 z^{96} + z^{120} + 6737 z^{16} + 145105 z^{22} + 363985 z^{24} + 55112 z^{20} + 10 z^{118}$
$+ 552046535 z^{84} + 158476 z^{105} + 148315264 z^{89} + 8372800 z^{97} + 5435626 z^{98}$
$+ 436439448 z^{85} + 340324807 z^{86} + 56695196 z^{92} + 27675367 z^{94} + 3813878148 z^{70}$
$+ 639939517 z^{47} + 3371001341 z^{59} + 3816383212 z^{61} + 2038928979 z^{54} + 519559381 z^{46}$
$+ 779843029 z^{48} + 1545167948 z^{52} + 4 z^{119} + 1973755292 z^{77} + 331715843 z^{44}$
$+ 4277663720 z^{66} + 3353 z^{111} + 278280 z^{104}$

> $e(z^2) := expand(e(z^2));$

$e(z^2) := 872274 z^{52} + 36095090 z^{72} + 4393106 z^{60} + 1328167 z^{54} + 90014 z^{42}$ **(29)**
$+ 119063148 z^{80} + 2038928979 z^{108} + 2848892771 z^{114} + 779843029 z^{96}$
$+ 3606730433 z^{120} + 3371001341 z^{118} + 202984042 z^{84} + 940236752 z^{98} + 260865858 z^{86}$
$+ 519559381 z^{92} + 639939517 z^{94} + 1545167948 z^{104} + 13204470 z^{66} + 13 z^{14} + 32 z^{16}$
$+ 74 z^{18} + 155 z^{20} + 316 z^{22} + 612 z^{24} + 1160 z^{26} + 19856 z^{36} + 3829 z^{30} + 55112 z^{40}$

$$+ 2126 z^{28} + 11672 z^{34} + 33332 z^{38} + 6737 z^{32} + 2174395 z^{200} + 808547 z^{204}$$
$$+ 688882553 z^{166} + 848181768 z^{164} + 6744 z^{220} + 3994067586 z^{138} + 4132169661 z^{126}$$
$$+ 2304400735 z^{110} + 4134086103 z^{136} + 48126 z^{214} + 88204 z^{212} + 2249523074 z^{152}$$
$$+ 198431393 z^{176} + 2532213546 z^{150} + 3356383912 z^{144} + 479339 z^{206} + 1338790 z^{202}$$
$$+ 89755448 z^{78} + 231200 z^{46} + 1235964517 z^{160} + 566692 z^{50} + 3469135 z^{198} + 27 z^{234}$$
$$+ 18657868 z^{68} + 9246741 z^{64} + 66951448 z^{76} + 2000224 z^{56} + 49418992 z^{74}$$
$$+ 6407555 z^{62} + 2980316 z^{58} + 26088224 z^{70} + 1710204982 z^{156} + 145105 z^{44}$$
$$+ 363985 z^{48} + 154 z^{230} + 3993437445 z^{124} + 2815570112 z^{148} + 1463215476 z^{158}$$
$$+ 62 z^{232} + 758 z^{226} + 1030602778 z^{162} + 109250394 z^{180} + 261713408 z^{174}$$
$$+ 39922778 z^{186} + 1604 z^{224} + 4276971739 z^{130} + z^{10} + 4 z^{12} + 3599155257 z^{142}$$
$$+ 4229607116 z^{134} + 18885015 z^{190} + 25584 z^{216} + 3092740855 z^{146} + 79298004 z^{182}$$
$$+ 4227813312 z^{128} + z^{242} + z^{240} + 12677964 z^{192} + 338 z^{228} + 13348 z^{218} + 10 z^{236}$$
$$+ 340324807 z^{172} + 436439448 z^{170} + 5435626 z^{196} + 8372800 z^{194} + 148315264 z^{178}$$
$$+ 158476 z^{210} + 552046535 z^{168} + 3813878148 z^{140} + 27675367 z^{188} + 56695196 z^{184}$$
$$+ 3816383212 z^{122} + 278280 z^{208} + 3353 z^{222} + 4277663720 z^{132} + 1973755292 z^{154}$$
$$+ 4 z^{238} + 417359802 z^{90} + 1323523938 z^{102} + 1121537006 z^{100} + 1784589063 z^{106}$$
$$+ 331715843 z^{88} + 156284730 z^{82} + 3116054839 z^{116} + 2576241555 z^{112}$$

> $\boldsymbol{B9(z) = expand\left(\frac{e(z)^2 + e(z^2)}{2}\right);}$

$$B9(z) = 6259766093074 z^{52} + 11218727666347244 z^{72} + 163851650222094 z^{60} \quad \textbf{(30)}$$
$$+ 14664942885761 z^{54} + 60521851541 z^{42} + 122124274835266420 z^{80}$$
$$+ 35330881695812604264 z^{108} + 4288208504642376741 z^{95}$$
$$+ 40007020305181992148 z^{109} + 68611757486299828432 z^{114}$$
$$+ 5209111639231253402 z^{96} + 109266965870413061926 z^{120}$$
$$+ 95667291198054236903 z^{118} + 354644565711562960 z^{84}$$
$$+ 23551755982463291831 z^{105} + 1192796043356977500 z^{89} + 6293937731010737849 z^{97}$$
$$+ 7563968511710575920 z^{98} + 456845867480256245 z^{85} + 585377814640481242 z^{86}$$
$$+ 2316658326801026261 z^{92} + 3511248158135461887 z^{94}$$
$$+ 102526323776317138551 z^{119} + 50464167188192380862 z^{111}$$
$$+ 20351506551108494499 z^{104} + 1495315366285546 z^{66} + 293 z^{14} + 2426 z^{16}$$
$$+ 15451 z^{18} + 82471 z^{20} + 387215 z^{22} + 1647090 z^{24} + 6471589 z^{26} + 99247471573 z^{43}$$
$$+ 261206754814 z^{45} + 668746750382 z^{47} + 1667419820538 z^{49} + 36633463637 z^{41}$$
$$+ 8126648571775976 z^{71} + 15404679150040005 z^{73} + 28583484598833063 z^{75}$$
$$+ 51918345433630696 z^{77} + 92317458390481413 z^{79} + 489955876 z^{33} + 2640881355 z^{36}$$
$$+ 82754689 z^{30} + 12505145 z^{27} + 22005251575 z^{40} + 13114567678 z^{39} + 23803671 z^{28}$$
$$+ 1520750150 z^{35} + 4544586619 z^{37} + 151417368 z^{31} + 44673480 z^{29} + 867482574 z^{34}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 7752686678\, z^{38} + 273872839\, z^{32} + 4052744456931\, z^{51} + 9610001749657\, z^{53} \\
&+ 22246449470388\, z^{55} + 50304411556601\, z^{57} + 111163848096835\, z^{59} + 6259\, z^{17} \\
&+ 36304\, z^{19} + 30810136649902\, z^{200} + 4139374466506\, z^{204} + 3623209434694439282\, z^{166} \\
&+ 5526686808554640632\, z^{164} + 248514157\, z^{220} + 13043513092938540490 7\, z^{138} \\
&+ 14232972172722028655 3\, z^{126} + 4505542769782099039 5\, z^{110} + 867\, z^{15} \\
&+ 12790329464719092168 8\, z^{123} + 13812649529228257535 7\, z^{125} \\
&+ 14583193283180234726 2\, z^{127} + 15050610852243021315 4\, z^{129} \\
&+ 15181819124708334218 8\, z^{131} + 14965828853289536675 0\, z^{133} \\
&+ 14415201953079799358 4\, z^{135} + 13564878991967285524 8\, z^{137} \\
&+ 12468522546580929789 3\, z^{139} + 11192906162245335562 4\, z^{141} \\
&+ 14024529396522837762 3\, z^{136} + 13427869537\, z^{214} + 46088723069\, z^{212} \\
&+ 40161914305284347953\, z^{152} + 290385246997052170\, z^{176} \\
&+ 51132854732595714074\, z^{150} + 91033741939681889905\, z^{144} + 1431058075044\, z^{206} \\
&+ 11511040982201\, z^{202} + 69415595224499843\, z^{78} + 419361698564\, z^{46} \\
&+ 11873078318726987417\, z^{160} + 2607706962128\, z^{50} + 79456677875277\, z^{198} + 2710\, z^{234} \\
&+ 2991102737695405\, z^{68} + 731464867961903\, z^{64} + 38625495669772446\, z^{76} \\
&+ 33550094363350\, z^{56} + 21039828139493989\, z^{74} + 350052397186492\, z^{62} \\
&+ 74993221120769\, z^{58} + 5855339764547341\, z^{70} + 2298024597897922151 4\, z^{156} \\
&+ 161579010049\, z^{44} + 1059406263660\, z^{48} + 102901\, z^{230} + 13329182884466996066 2\, z^{124} \\
&+ 63508015479556779534\, z^{148} + 16732437408996135876\, z^{158} + 17480\, z^{232} \\
&+ 2819723\, z^{226} + 8208092417968004870\, z^{162} + 86625714284168324\, z^{180} \\
&+ 508922362353834839\, z^{174} + 11259302961268167\, z^{186} + 13323021\, z^{224} \\
&+ 15159475508204178235 3\, z^{130} + z^{10} + 4\, z^{11} + 23\, z^{12} + 84\, z^{13} \\
&+ 10510674384353463092 8\, z^{142} + 14730654055907683104 0\, z^{134} + 181079\, z^{21} \\
&+ 807169\, z^{23} + 3293841\, z^{25} + 2468848990215946\, z^{190} + 3732939174\, z^{216} \\
&+ 76965858960456828127\, z^{146} + 45246136103935346\, z^{182} \\
&+ 14857343917758123150 5\, z^{128} + z^{242} + 83958610709087394596\, z^{145} \\
&+ 70127723378175206467\, z^{147} + 57161377296833146597\, z^{149} \\
&+ 45457776294869063070\, z^{151} + 35261896505277186645\, z^{153} \\
&+ 26674091058203194482\, z^{155} + 19672041265914353233\, z^{157} \\
&+ 14140637215389648340\, z^{159} + 9904361376101393901\, z^{161} \\
&+ 6757624090947532459\, z^{163} + 4489906346453968711\, z^{165} \\
&+ 2904122867945442009\, z^{167} + 1828009746078399895\, z^{169} \\
&+ 1119363836440124343\, z^{171} + 666542976815041513\, z^{173} + 385811161691435983\, z^{175} \\
&+ 216983527512270656\, z^{177} + 118519222124450910\, z^{179} + 62842536392391666\, z^{181} \\
&+ 32329679040906886\, z^{183} + 16128634513507954\, z^{185} + 7798168301584460\, z^{187}
\end{aligned}
$$

$+ 3651907337331969 z^{189} + 1655365283628177 z^{191} + 725787325438980 z^{193}$
$+ 307566189503756 z^{195} + 125872046758204 z^{197} + 98111652423057991779 z^{143}$
$+ 5 z^{240} + 1100725113018229 z^{192} + 558544 z^{228} + 988183230 z^{218}$
$+ 49705275723434 z^{199} + 18921243484543 z^{201} + 6936330929819 z^{203}$
$+ 2446052253230 z^{205} + 828781385109 z^{207} + 269457099897 z^{209} + 83945933616 z^{211}$
$+ 25020410259 z^{213} + 7122392302 z^{215} + 1932667815 z^{217} + 498814836 z^{219}$
$+ 122145335 z^{221} + 28292810 z^{223} + 6176898 z^{225} + 1265340 z^{227} + 241794 z^{229}$
$+ 42767 z^{231} + 6928 z^{233} + 1010 z^{235} + 129 z^{237} + 14 z^{239} + z^{241} + 379 z^{236}$
$+ 866816904792572461 z^{172} + 1435427776897821721 z^{170} + 197628373837568 z^{196}$
$+ 474508171807352 z^{194} + 160955818340625726 z^{178} + 151217911303 z^{210}$
$+ 2311974888165277755 z^{168} + 118486172592640240163 z^{140} + 5358053319200586 z^{188}$
$+ 22923644330229815 z^{184} + 122044426058716919147 z^{122} + 475053764177 z^{208}$
$+ 59211930 z^{222} + 151169898543014752592 z^{132} + 30765829518353120478 z^{154}$
$+ 47 z^{238} + 1496173030067310642 z^{90} + 160698562225651501 z^{81}$
$+ 62274933487573101061 z^{113} + 115802607901231880398 z^{121}$
$+ 1866727874076121359 z^{91} + 240160649247963 z^{61} + 507410177334302 z^{63}$
$+ 1048691648694441 z^{65} + 2120595572870717 z^{67} + 4196242641200573 z^{69}$
$+ 14951662121610445127 z^{102} + 10749768497535425366 z^{100}$
$+ 27107798972194012776 z^{106} + 945879367653498900 z^{88}$
$+ 12712051498193762550 z^{101} + 17491115844574175706 z^{103}$
$+ 31031722505921977372 z^{107} + 210336181932527698 z^{82} + 273846930224260828 z^{83}$
$+ 88772535051022979707 z^{117} + 75178057414191070313 z^{115}$
$+ 81919278330751560993 z^{116} + 56213412996974985764 z^{112}$
$+ 2859715541236212466 z^{93} + 746091337841597107 z^{87} + 904154918505601418 4 z^{99}$

> $B9(z) := 6259766093074 z^{52} + 11218727666347244 z^{72} + 163851650222094 z^{60}$
$+ 14664942885761 z^{54} + 60521851541 z^{42} + 122124274835266420 z^{80}$
$+ 35330881695812604264 z^{108} + 4288208504642376741 z^{95}$
$+ 40007020305181992148 z^{109} + 68611757486299828432 z^{114}$
$+ 5209111639231253402 z^{96} + 109266965870413061926 z^{120}$
$+ 95667291198054236903 z^{118} + 354644565711562960 z^{84}$
$+ 23551755982463291831 z^{105} + 1192796043356977500 z^{89}$
$+ 6293937731010737849 z^{97} + 7563968511710575920 z^{98} + 456845867480256245 z^{85}$
$+ 585377814640481242 z^{86} + 2316658326801026261 z^{92} + 3511248158135461887 z^{94}$
$+ 102526323776317138551 z^{119} + 50464167188192380862 z^{111}$
$+ 20351506551108494499 z^{104} + 1495315366285546 z^{66} + 293 z^{14} + 2426 z^{16}$
$+ 15451 z^{18} + 82471 z^{20} + 387215 z^{22} + 1647090 z^{24} + 6471589 z^{26} + 99247471573 z^{43}$
$+ 261206754814 z^{45} + 668746750382 z^{47} + 1667419820538 z^{49} + 36633463637 z^{41}$
$+ 8126648571775976 z^{71} + 15404679150040005 z^{73} + 28583484598833063 z^{75}$

$$
\begin{aligned}
&+ 51918345433630696\, z^{77} + 92317458390481413\, z^{79} + 489955876\, z^{33} \\
&+ 2640881355\, z^{36} + 82754689\, z^{30} + 12505145\, z^{27} + 22005251575\, z^{40} \\
&+ 13114567678\, z^{39} + 23803671\, z^{28} + 1520750150\, z^{35} + 4544586619\, z^{37} \\
&+ 151417368\, z^{31} + 44673480\, z^{29} + 867482574\, z^{34} + 7752686678\, z^{38} + 273872839\, z^{32} \\
&+ 4052744456931\, z^{51} + 9610001749657\, z^{53} + 22246449470388\, z^{55} \\
&+ 50304411556601\, z^{57} + 111163848096835\, z^{59} + 6259\, z^{17} + 36304\, z^{19} \\
&+ 30810136649902\, z^{200} + 4139374466506\, z^{204} + 3623209434694439282\, z^{166} \\
&+ 5526686808554640632\, z^{164} + 248514157\, z^{220} + 130435130929385404907\, z^{138} \\
&+ 142329721727220286553\, z^{126} + 45055427697820990395\, z^{110} + 867\, z^{15} \\
&+ 127903294647190921688\, z^{123} + 138126495292282575357\, z^{125} \\
&+ 145831932831802347262\, z^{127} + 150506108522430213154\, z^{129} \\
&+ 151818191247083342188\, z^{131} + 149658288532895366750\, z^{133} \\
&+ 144152019530797993584\, z^{135} + 135648789919672855248\, z^{137} \\
&+ 124685225465809297893\, z^{139} + 111929061622453355624\, z^{141} \\
&+ 140245293965228377623\, z^{136} + 13427869537\, z^{214} + 46088723069\, z^{212} \\
&+ 40161914305284347953\, z^{152} + 290385246997052170\, z^{176} \\
&+ 51132854732595714074\, z^{150} + 91033741939681889905\, z^{144} + 1431058075044\, z^{206} \\
&+ 11511040982201\, z^{202} + 69415595224499843\, z^{78} + 419361698564\, z^{46} \\
&+ 11873078318726987417\, z^{160} + 2607706962128\, z^{50} + 79456677875277\, z^{198} \\
&+ 2710\, z^{234} + 2991102737695405\, z^{68} + 731464867961903\, z^{64} + 38625495669772446\, z^{76} \\
&+ 33550094363350\, z^{56} + 21039828139493989\, z^{74} + 350052397186492\, z^{62} \\
&+ 74993221120769\, z^{58} + 5855339764547341\, z^{70} + 22980245978979221514\, z^{156} \\
&+ 161579010049\, z^{44} + 1059406263660\, z^{48} + 102901\, z^{230} \\
&+ 133291828844669960662\, z^{124} + 63508015479556779534\, z^{148} \\
&+ 16732437408996135876\, z^{158} + 17480\, z^{232} + 2819723\, z^{226} \\
&+ 8208092417968004870\, z^{162} + 86625714284168324\, z^{180} + 508922362353834839\, z^{174} \\
&+ 11259302961268167\, z^{186} + 13323021\, z^{224} + 151594755082041782353\, z^{130} + z^{10} \\
&+ 4\, z^{11} + 23\, z^{12} + 84\, z^{13} + 105106743843534630928\, z^{142} \\
&+ 147306540559076831040\, z^{134} + 181079\, z^{21} + 807169\, z^{23} + 3293841\, z^{25} \\
&+ 2468848990215946\, z^{190} + 3732939174\, z^{216} + 76965858960456828127\, z^{146} \\
&+ 45246136103935346\, z^{182} + 148573439177581231505\, z^{128} + z^{242} \\
&+ 83958610709087394596\, z^{145} + 70127723378175206467\, z^{147} \\
&+ 57161377296833146597\, z^{149} + 45457776294869063070\, z^{151} \\
&+ 35261896505277186645\, z^{153} + 26674091058203194482\, z^{155} \\
&+ 19672041265914353233\, z^{157} + 14140637215389648340\, z^{159} \\
&+ 9904361376101393901\, z^{161} + 6757624090947532459\, z^{163} \\
&+ 4489906346453968711\, z^{165} + 2904122867945442009\, z^{167} \\
&+ 1828009746078399895\, z^{169} + 1119363836440124343\, z^{171} + 666542976815041513\, z^{173} \\
&+ 385811161691435983\, z^{175} + 216983527512270656\, z^{177} + 118519222124450910\, z^{179} \\
&+ 62842536392391666\, z^{181} + 32329679040906886\, z^{183} + 16128634513507954\, z^{185} \\
&+ 7798168301584460\, z^{187} + 3651907337331969\, z^{189} + 1655365283628177\, z^{191} \\
&+ 725787325438980\, z^{193} + 307566189503756\, z^{195} + 125872046758204\, z^{197}
\end{aligned}
$$

$$+ 98111652423057991779\, z^{143} + 5\, z^{240} + 1100725113018229\, z^{192} + 558544\, z^{228}$$
$$+ 988183230\, z^{218} + 49705275723434\, z^{199} + 18921243484543\, z^{201} + 6936330929819\, z^{203}$$
$$+ 2446052253230\, z^{205} + 828781385109\, z^{207} + 269457099897\, z^{209} + 83945933616\, z^{211}$$
$$+ 25020410259\, z^{213} + 7122392302\, z^{215} + 1932667815\, z^{217} + 498814836\, z^{219}$$
$$+ 122145335\, z^{221} + 28292810\, z^{223} + 6176898\, z^{225} + 1265340\, z^{227} + 241794\, z^{229}$$
$$+ 42767\, z^{231} + 6928\, z^{233} + 1010\, z^{235} + 129\, z^{237} + 14\, z^{239} + z^{241} + 379\, z^{236}$$
$$+ 866816904792572461\, z^{172} + 1435427776897821721\, z^{170} + 197628373837568\, z^{196}$$
$$+ 474508171807352\, z^{194} + 160955818340625726\, z^{178} + 151217911303\, z^{210}$$
$$+ 2311974888165277755\, z^{168} + 118486172592640240163\, z^{140} + 5358053319200586\, z^{188}$$
$$+ 22923644330229815\, z^{184} + 122044426058716919147\, z^{122} + 475053764177\, z^{208}$$
$$+ 59211930\, z^{222} + 151169898543014752592\, z^{132} + 30765829518353120478\, z^{154}$$
$$+ 47\, z^{238} + 1496173030067310642\, z^{90} + 160698562225651501\, z^{81}$$
$$+ 62274933487573101061\, z^{113} + 115802607901231880398\, z^{121}$$
$$+ 1866727874076121359\, z^{91} + 240160649247963\, z^{61} + 507410177334302\, z^{63}$$
$$+ 1048691648694441\, z^{65} + 2120595572870717\, z^{67} + 4196242641200573\, z^{69}$$
$$+ 14951662121610445127\, z^{102} + 10749768497535425366\, z^{100}$$
$$+ 27107798972194012776\, z^{106} + 945879367653498900\, z^{88}$$
$$+ 12712051498193762550\, z^{101} + 17491115844574175706\, z^{103}$$
$$+ 31031722505921977372\, z^{107} + 210336181932527698\, z^{82} + 273846930224260828\, z^{83}$$
$$+ 88772535051022979707\, z^{117} + 75178057414191070313\, z^{115}$$
$$+ 81919278330751560993\, z^{116} + 56213412996974985764\, z^{112}$$
$$+ 2859715541236212466\, z^{93} + 746091337841597107\, z^{87} + 9041549185056014184\, z^{99}$$

$$B9 := z \rightarrow 725787325438980\, z^{193} + 507410177334302\, z^{63} + 36633463637\, z^{41} \qquad \textbf{(31)}$$
$$+ 99247471573\, z^{43} + 498814836\, z^{219} + 17480\, z^{232} + 4196242641200573\, z^{69}$$
$$+ 50304411556601\, z^{57} + 45055427697820990395\, z^{110} + 210336181932527698\, z^{82}$$
$$+ 273846930224260828\, z^{83} + 14951662121610445127\, z^{102}$$
$$+ 10749768497535425366\, z^{100} + 27107798972194012776\, z^{106}$$
$$+ 31031722505921977372\, z^{107} + 2607706962128\, z^{50} + 33550094363350\, z^{56}$$
$$+ 2991102737695405\, z^{68} + 38625495669772446\, z^{76} + 60521851541\, z^{42}$$
$$+ 32329679040906886\, z^{183} + 16128634513507954\, z^{185} + 945879367653498900\, z^{88}$$
$$+ 12712051498193762550\, z^{101} + 17491115844574175706\, z^{103} + 11218727666347244\, z^{72}$$
$$+ 163851650222094\, z^{60} + 28583484598833063\, z^{75} + 4052744456931\, z^{51}$$
$$+ 122145335\, z^{221} + 28292810\, z^{223} + 13427869537\, z^{214} + 46088723069\, z^{212}$$
$$+ 151169898543014752592\, z^{132} + 30765829518353120478\, z^{154}$$
$$+ 105106743843534630928\, z^{142} + 261206754814\, z^{45} + 22246449470388\, z^{55}$$
$$+ 88772535051022979707\, z^{117} + 6757624090947532459\, z^{163}$$
$$+ 9041549185056014184\, z^{99} + z^{241} + 122124274835266420\, z^{80}$$
$$+ 69415595224499843\, z^{78} + 4489906346453968711\, z^{165} + 2904122867945442009\, z^{167}$$
$$+ 13323021\, z^{224} + 86625714284168324\, z^{180} + 866816904792572461\, z^{172} + 6471589\, z^{26}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 15451\,z^{18} + 293\,z^{14} + 489955876\,z^{33} + 867\,z^{15} + 2640881355\,z^{36} + 82754689\,z^{30} \\
&+ 12505145\,z^{27} + 181079\,z^{21} + 6928\,z^{233} + 1010\,z^{235} + 1435427776897821721\,z^{170} \\
&+ 197628373837568\,z^{196} + 47\,z^{238} + 290385246997052170\,z^{176} \\
&+ 5113285473259571407 4\,z^{150} + 1496582885328953667 50\,z^{133} \\
&+ 1441520195307979935 84\,z^{135} + 129\,z^{237} + 2311974888165277755\,z^{168} \\
&+ 6350801547955677953 4\,z^{148} + 1673243740899613587 6\,z^{158} \\
&+ 3526189650527718664 5\,z^{153} + 2667409105820319448 2\,z^{155} + 59211930\,z^{222} \\
&+ 2468848990215946\,z^{190} + 3732939174\,z^{216} + 307566189503756\,z^{195} \\
&+ 125872046758204\,z^{197} + 1828009746078399895\,z^{169} + 21039828139493989\,z^{74} \\
&+ 350052397186492\,z^{62} + 7517805741419107031 3\,z^{115} + 8191927833075156099 3\,z^{116} \\
&+ 1667419820538\,z^{49} + 9610001749657\,z^{53} + 92317458390481413\,z^{79} \\
&+ 1246852254658092978 93\,z^{139} + 1119290616224533556 24\,z^{141} \\
&+ 1402452939652283776 23\,z^{136} + 1048691648694441\,z^{65} + 74993221120769\,z^{58} \\
&+ 5621341299697498576 4\,z^{112} + 508922362353834839\,z^{174} + 11259302961268167\,z^{186} \\
&+ 30810136649902\,z^{200} + 9811165242305799177 9\,z^{143} + 4016191430528434795 3\,z^{152} \\
&+ 1332918288446699606 62\,z^{124} + 4545777629486906307 0\,z^{151} \\
&+ 2859715541236212466\,z^{93} + 746091337841597107\,z^{87} + 1496173030067310642\,z^{90} \\
&+ 160698562225651501\,z^{81} + 6227493348757310106 1\,z^{113} + 160955818340625726\,z^{178} \\
&+ 151217911303\,z^{210} + 1304351309293854049 07\,z^{138} + 1423297217272202865 53\,z^{126} \\
&+ 22005251575\,z^{40} + 13114567678\,z^{39} + 6259\,z^{17} + 807169\,z^{23} + 36304\,z^{19} \\
&+ 3293841\,z^{25} + 23803671\,z^{28} + 1520750150\,z^{35} + 4544586619\,z^{37} + 151417368\,z^{31} \\
&+ 44673480\,z^{29} + 867482574\,z^{34} + 7752686678\,z^{38} + 273872839\,z^{32} \\
&+ 8395861070908739459 6\,z^{145} + 3623209434694439282\,z^{166} \\
&+ 5526686808554640632\,z^{164} + 22923644330229815\,z^{184} + 23\,z^{12} + 84\,z^{13} + z^{10} + 4\,z^{11} \\
&+ 385811161691435983\,z^{175} + 988183230\,z^{218} + 49705275723434\,z^{199} \\
&+ 1184861725926402401 63\,z^{140} + 5358053319200586\,z^{188} + 25020410259\,z^{213} \\
&+ 1279032946471909216 88\,z^{123} + 828781385109\,z^{207} + 102901\,z^{230} \\
&+ 1187307831872698741 7\,z^{160} + 79456677875277\,z^{198} + 2710\,z^{234} \\
&+ 2120595572870717\,z^{67} + 8126648571775976\,z^{71} + 5\,z^{240} + 1100725113018229\,z^{192} \\
&+ 7798168301584460\,z^{187} + 3651907337331969\,z^{189} + 1655365283628177\,z^{191} \\
&+ 474508171807352\,z^{194} + 1158026079012318803 98\,z^{121} \\
&+ 1381264952922825753 57\,z^{125} + 7122392302\,z^{215} + 1932667815\,z^{217} \\
&+ 11193638364401243 43\,z^{171} + 666542976815041513\,z^{173} \\
&+ 9103374193968188990 5\,z^{144} + 1431058075044\,z^{206} + 11511040982201\,z^{202} \\
&+ 62842536392391666\,z^{181} + 1515947550820417823 53\,z^{130} + 731464867961903\,z^{64} \\
&+ 1866727874076121359\,z^{91} + 15404679150040005\,z^{73} + 1220444260587169191 47\,z^{122}
\end{aligned}
$$

$$+ 475053764177 z^{208} + 1414063721538964834 0 z^{159} + 9904361376101393901 z^{161}$$
$$+ 269457099897 z^{209} + 83945933616 z^{211} + 1265340 z^{227} + 241794 z^{229}$$
$$+ 3533088169581260426 4 z^{108} + 4288208504642376741 z^{95} + 14 z^{239} + 379 z^{236}$$
$$+ 4000702030518199214 8 z^{109} + 6861175748629982843 2 z^{114}$$
$$+ 5209111639231253402 z^{96} + 1518181912470833421 88 z^{131}$$
$$+ 1092669658704130619 26 z^{120} + 1356487899196728552 48 z^{137} + 6936330929819 z^{203}$$
$$+ 2446052253230 z^{205} + 2819723 z^{226} + 8208092417968004870 z^{162}$$
$$+ 7012772337817520646 7 z^{147} + 5716137729683314659 7 z^{149} + 18921243484543 z^{201}$$
$$+ 2426 z^{16} + 387215 z^{22} + 1647090 z^{24} + 82471 z^{20} + 6176898 z^{225}$$
$$+ 1458319328318023472 62 z^{127} + 1505061085224302131 54 z^{129} + 558544 z^{228}$$
$$+ 9566729119805423690 3 z^{118} + 354644565711562960 z^{84}$$
$$+ 2355175598246329183 1 z^{105} + 1192796043356977500 z^{89} + 6293937731010737849 z^{97}$$
$$+ 7563968511710575920 z^{98} + 456845867480256245 z^{85} + 585377814640481242 z^{86}$$
$$+ 2316658326801026261 z^{92} + 3511248158135461887 z^{94} + 5855339764547341 z^{70}$$
$$+ 668746750382 z^{47} + 111163848096835 z^{59} + 240160649247963 z^{61}$$
$$+ 14664942885761 z^{54} + 419361698564 z^{46} + 1059406263660 z^{48} + 6259766093074 z^{52}$$
$$+ 1025263237763171385 51 z^{119} + 51918345433630696 z^{77} + 161579010049 z^{44}$$
$$+ 1495315366285546 z^{66} + 5046416718819238086 2 z^{111} + 2035150655110849449 9 z^{104}$$
$$+ 4139374466506 z^{204} + 2298024597897922151 4 z^{156} + 7696585896045682812 7 z^{146}$$
$$+ 1967204126591435323 3 z^{157} + 216983527512270656 z^{177} + 118519222124450910 z^{179}$$
$$+ 42767 z^{231} + z^{242} + 248514157 z^{220} + 1473065405590768310 40 z^{134}$$
$$+ 45246136103935346 z^{182} + 1485734391775812315 05 z^{128}$$

> $B(z) := (B1(z) + B3(z) + B5(z) + B7(z) + B9(z));$

$$B(z) := 6259767020663 z^{52} + 11218727666347698 z^{72} + 163851650358532 z^{60} \tag{32}$$
$$+ 14664943534290 z^{54} + 60523693559 z^{42} + 122124274835266421 z^{80}$$
$$+ 3533088169581260426 4 z^{108} + 4288208504642376741 z^{95}$$
$$+ 4000702030518199214 8 z^{109} + 6861175748629982843 2 z^{114}$$
$$+ 5209111639231253402 z^{96} + 1092669658704130619 26 z^{120}$$
$$+ 9566729119805423690 3 z^{118} + 354644565711562960 z^{84}$$
$$+ 2355175598246329183 1 z^{105} + 1192796043356977500 z^{89} + 6293937731010737849 z^{97}$$
$$+ 7563968511710575920 z^{98} + 456845867480256245 z^{85} + 585377814640481242 z^{86}$$
$$+ 2316658326801026261 z^{92} + 3511248158135461887 z^{94}$$
$$+ 1025263237763171385 51 z^{119} + 5046416718819238086 2 z^{111}$$
$$+ 2035150655110849449 9 z^{104} + z^{4} + 1495315366298362 z^{66} + 880 z^{14} + 4465 z^{16}$$
$$+ 21577 z^{18} + 98541 z^{20} + 424658 z^{22} + 1725747 z^{24} + 6622258 z^{26} + 99249332690 z^{43}$$
$$+ 261208560045 z^{45} + 668748383534 z^{47} + 1667421196463 z^{49} + 36635255316 z^{41}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 8126648571776823 z^{71} + 15404679150040230 z^{73} + 28583484598833113 z^{75} \\
&+ 51918345433630705 z^{77} + 92317458390481414 z^{79} + 490738755 z^{33} + 2642094041 z^{36} \\
&+ 83186879 z^{30} + 12707005 z^{27} + 22006965719 z^{40} + 13116179597 z^{39} + 24069011 z^{28} \\
&+ 1521816147 z^{35} + 4545942415 z^{37} + 151953600 z^{31} + 45015194 z^{29} + 868404237 z^{34} \\
&+ 7754177798 z^{38} + 274526722 z^{32} + 4052745534530 z^{51} + 9610002532549 z^{53} \\
&+ 22246449996728 z^{55} + 50304411883157 z^{57} + 111163848283220 z^{59} + 9837 z^{17} \\
&+ 46354 z^{19} + 30810136649902 z^{200} + 4139374466506 z^{204} + 3623209434694439282 z^{166} \\
&+ 5526686808554640632 z^{164} + 248514157 z^{220} + 13043513092938540490 7 z^{138} \\
&+ 14232972172722028655 3 z^{126} + 45055427697820990395 z^{110} + 1967 z^{15} \\
&+ 127903294647190921688 z^{123} + 138126495292282575357 z^{125} \\
&+ 145831932831802347262 z^{127} + 150506108522430213154 z^{129} \\
&+ 151818191247083342188 z^{131} + 149658288532895366750 z^{133} \\
&+ 144152019530797993584 z^{135} + 135648789919672855248 z^{137} \\
&+ 124685225465809297893 z^{139} + 111929061622453355624 z^{141} \\
&+ 140245293965228377623 z^{136} + 13427869537 z^{214} + 46088723069 z^{212} \\
&+ 40161914305284347953 z^{152} + 290385246997052170 z^{176} \\
&+ 51132854732595714074 z^{150} + 91033741939681889905 z^{144} + 1431058075044 z^{206} \\
&+ 11511040982201 z^{202} + 69415595224499847 z^{78} + 419363431139 z^{46} \\
&+ 11873078318726987417 z^{160} + 2607708191438 z^{50} + 79456677875277 z^{198} + 2710 z^{234} \\
&+ 2991102737700157 z^{68} + 731464867992988 z^{64} + 38625495669772470 z^{76} \\
&+ 33550094782410 z^{56} + 21039828139494103 z^{74} + 350052397254744 z^{62} \\
&+ 74993221370280 z^{58} + 5855339764548907 z^{70} + 22980245978979221514 z^{156} \\
&+ 161580859275 z^{44} + 1059407776602 z^{48} + 102901 z^{230} + 133291828844669960662 z^{124} \\
&+ 63508015479556779534 z^{148} + 16732437408996135876 z^{158} + 17480 z^{232} \\
&+ 2819723 z^{226} + 8208092417968004870 z^{162} + 86625714284168324 z^{180} \\
&+ 508922362353834839 z^{174} + 11259302961268167 z^{186} + 13323021 z^{224} \\
&+ 151594755082041782353 z^{130} + z^{2} + 38 z^{10} + 73 z^{11} + 173 z^{12} + 375 z^{13} \\
&+ 105106743843534630928 z^{142} + 147306540559076831040 z^{134} + 205905 z^{21} \\
&+ 862040 z^{23} + 3403818 z^{25} + 2468848990215946 z^{190} + 3732939174 z^{216} \\
&+ 76965858960456828127 z^{146} + 45246136103935346 z^{182} \\
&+ 148573439177581231505 z^{128} + z^{242} + 83958610709087394596 z^{145} \\
&+ 70127723378175206467 z^{147} + 57161377296833146597 z^{149} \\
&+ 45457776294869063070 z^{151} + 35261896505277186645 z^{153} \\
&+ 26674091058203194482 z^{155} + 19672041265914353233 z^{157} \\
&+ 14140637215389648340 z^{159} + 9904361376101393901 z^{161} \\
&+ 6757624090947532459 z^{163} + 4489906346453968711 z^{165}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2904122867945442009\, z^{167} + 1828009746078399895\, z^{169} \\
&+ 1119363836440124343\, z^{171} + 666542976815041513\, z^{173} + 385811161691435983\, z^{175} \\
&+ 216983527512270656\, z^{177} + 118519222124450910\, z^{179} + 62842536392391666\, z^{181} \\
&+ 32329679040906886\, z^{183} + 16128634513507954\, z^{185} + 7798168301584460\, z^{187} \\
&+ 3651907337331969\, z^{189} + 1655365283628177\, z^{191} + 725787325438980\, z^{193} \\
&+ 307566189503756\, z^{195} + 125872046758204\, z^{197} + 98111652423057991779\, z^{143} \\
&+ 5\, z^{240} + 1100725113018229\, z^{192} + 558544\, z^{228} + 988183230\, z^{218} + 3\, z^{6} + 9\, z^{8} \\
&+ 49705275723434\, z^{199} + 18921243484543\, z^{201} + 6936330929819\, z^{203} \\
&+ 2446052253230\, z^{205} + 828781385109\, z^{207} + 269457099897\, z^{209} + 83945933616\, z^{211} \\
&+ 25020410259\, z^{213} + 7122392302\, z^{215} + 1932667815\, z^{217} + 498814836\, z^{219} \\
&+ 122145335\, z^{221} + 28292810\, z^{223} + 6176898\, z^{225} + 1265340\, z^{227} + 241794\, z^{229} \\
&+ 42767\, z^{231} + 6928\, z^{233} + 1010\, z^{235} + 129\, z^{237} + 14\, z^{239} + z^{241} + 379\, z^{236} \\
&+ 866816904792572461\, z^{172} + 1435427776897821721\, z^{170} + 197628373837568\, z^{196} \\
&+ 474508171807352\, z^{194} + 160955818340625726\, z^{178} + 151217911303\, z^{210} \\
&+ 2311974888165277755\, z^{168} + 118486172592640240163\, z^{140} + 5358053319200586\, z^{188} \\
&+ 22923644330229815\, z^{184} + 122044426058716919147\, z^{122} + 475053764177\, z^{208} \\
&+ 59211930\, z^{222} + 151169898543014752592\, z^{132} + 30765829518353120478\, z^{154} \\
&+ 47\, z^{238} + 1496173030067310642\, z^{90} + 160698562225651501\, z^{81} \\
&+ 62274933487573101061\, z^{113} + 115802607901231880398\, z^{121} \\
&+ 1866727874076121359\, z^{91} + 240160649345460\, z^{61} + 507410177380843\, z^{63} \\
&+ 1048691648714610\, z^{65} + 2120595572878595\, z^{67} + 4196242641203322\, z^{69} + 15\, z^{9} \\
&+ 14951662121610445127\, z^{102} + 10749768497535425366\, z^{100} \\
&+ 27107798972194012776\, z^{106} + 945879367653498900\, z^{88} \\
&+ 12712051498193762550\, z^{101} + 17491115844574175706\, z^{103} \\
&+ 31031722505921977372\, z^{107} + 210336181932527698\, z^{82} + 273846930224260828\, z^{83} \\
&+ 88772535051022979707\, z^{117} + 75178057414191070313\, z^{115} \\
&+ 81919278330751560993\, z^{116} + 56213412996974985764\, z^{112} \\
&+ 2859715541236212466\, z^{93} + 746091337841597107\, z^{87} + 9041549185056014184\, z^{99} \\
&+ 3\, z^{7} + z^{5}
\end{aligned}
$$

>

Jumlah Antara *Centered Tree* dan *Bicentered Tree*

$$
\begin{aligned}
> \; & Jumlah \coloneqq expand\big(1835238780538\, z^{105} + 1165732822\, z^{130} + z + 6385145690071\, z^{80} \\
& + 12935448538\, z^{124} + 7290046670650\, z^{91} + 22562248\, z^{138} + 1252279228882\, z^{66} \\
& + 2732367475\, z^{128} + 458712279521\, z^{112} + 361444830281\, z^{113} + 5026272539007\, z^{97} \\
& + 10\, z^{158} + 1796130456\, z^{129} + 7918075585\, z^{46} + 15157355826\, z^{48} + 931198851\, z^{40} \\
& + 2031247014336\, z^{69} + 4039953\, z^{141} + 378\, z^{154} + 4291652253063\, z^{75} \\
& + 87896770090\, z^{54} + 886\, z^{153} + 4957326\, z^{28} + 33332880\, z^{32} + 427238011\, z^{38} + 28\, z^{157} \\
& + 38829467\, z^{137} + 114590622444\, z^{55} + 1075094178825\, z^{108} + 6673832362646\, z^{93} \\
& + 102266\, z^{21} + 50499724322\, z^{52} + 2815974153\, z^{43} + 596841\, z^{24} + 54540\, z^{20} \\
& + 1772502\, z^{26} + 50697647707\, z^{120} + z^{3} + z^{4} + 1357668510\, z^{41} + 1037052\, z^{25} \\
& + 5655002067\, z^{45} + 20723038013\, z^{49} + 189401224\, z^{36} + 13156301\, z^{30} + 285715287\, z^{37} \\
& + 28108605385\, z^{50} + 21057210\, z^{31} + 2\, z^{5} + 1963249435\, z^{42} + 8126193\, z^{29} \\
& + 2985389\, z^{27} + 66888672947\, z^{53} + 19783\, z^{149} + 181304759\, z^{134} + 1185098\, z^{143} \\
& + 294617997\, z^{133} + 93794870375\, z^{118} + 7549926722035\, z^{84} + 2348296148941\, z^{70} \\
& + 281869703185\, z^{114} + 9331\, z^{150} + 85\, z^{11} + 3581\, z^{16} + 7320\, z^{17} + 37\, z^{10} + 392\, z^{13} \\
& + 6\, z^{7} + 1739\, z^{15} + 2\, z^{6} + 9\, z^{8} + 20\, z^{9} + 176\, z^{12} + 819\, z^{14} + 7061048862026\, z^{82} \\
& + 14568\, z^{18} + 187598\, z^{22} + 7332317202179\, z^{83} + 110036672\, z^{135} + 5468753945422\, z^{96} \\
& + 3866840615821\, z^{74} + 576220204190\, z^{111} + 472234295\, z^{132} + 4104925184\, z^{127} \\
& + 36655007315\, z^{121} + 383045166313\, z^{60} + 40848\, z^{148} + 7831964252014\, z^{87} \\
& + 1048753242179\, z^{65} + 1550622403082\, z^{106} + 65837165\, z^{136} + 4356\, z^{151} \\
& + 190175994547\, z^{57} + 7005971485555\, z^{92} + 476088521880\, z^{61} + 217527660783\, z^{115} \\
& + 2205474\, z^{142} + 587021352221\, z^{62} + 1742820206111\, z^{68} + 65\, z^{156} + 242091538988\, z^{58} \\
& + 166108337266\, z^{116} + 83163\, z^{147} + 4006569175\, z^{44} + 124434670\, z^{35} \\
& + 37825519075\, z^{51} + 80996299\, z^{34} + 52220962\, z^{33} + 10998875234\, z^{47} \\
& + 6742814244981\, z^{81} + 718032254708\, z^{63} + 746870615\, z^{131} + 305735574429\, z^{59} \\
& + 325111\, z^{145} + 12916099\, z^{139} + 2692871242647\, z^{71} + 1297485969724\, z^{107} \\
& + 5584126565058\, z^{78} + 3455619681149\, z^{73} + 125496238452\, z^{117} + 5996134419111\, z^{79} \\
& + 4577790450782\, z^{98} + 6301287800999\, z^{94} + 2151276069645\, z^{104} + 7803214029356\, z^{86} \\
& + 69340062364\, z^{119} + 28538\, z^{19} + 337829\, z^{23} + 633416064\, z^{39} + 4724117551537\, z^{76} \\
& + 7279523\, z^{140} + 2497757044183\, z^{103} + 1483302969771\, z^{67} + z^{161} + 6091314535\, z^{126} \\
& + 871268813787\, z^{64} + 625713\, z^{144} + 5896688157356\, z^{95} + 4\, z^{159} + 18518094573\, z^{123} \\
& + 3272923326399\, z^{101} + 3694265689677\, z^{100} + 8929893881\, z^{125} + 4131352891288\, z^{99} \\
& + 5157445093535\, z^{77} + 26203330757\, z^{122} + 7708303031031\, z^{85} + 148209970987\, z^{56} \\
& + 3062969619276\, z^{72} + 2872674173438\, z^{102} + z^{160} + 1968\, z^{152} + 166\, z^{155} + 165746\, z^{146} \\
& + 7793509690628\, z^{88} + 716519844425\, z^{110} + 882066320497\, z^{109} + 7519375814392\, z^{90} \\
& + 7688524521792\, z^{89} + 6259767020663\, z^{52} + 11218727666347698\, z^{72} \\
& + 163851650358532\, z^{60} + 14664943534290\, z^{54} + 60523693559\, z^{42} \\
& + 122124274835266421\, z^{80} + 3533088169581260 4264\, z^{108} + 4288208504642376741\, z^{95} \\
& + 4000702030518199 2148\, z^{109} + 6861175748629 9828432\, z^{114} \\
& + 5209111639231253402\, z^{96} + 10926696587041306 1926\, z^{120} \\
& + 956672911980542 36903\, z^{118} + 354644565711562960\, z^{84}
\end{aligned}
$$

$$+ 23551755982463291831\, z^{105} + 11927960433569775 00\, z^{89}$$

$+ 19672041265914353233\, z^{157} + 14140637215389648340\, z^{159}$
$+ 9904361376101393901\, z^{161} + 6757624090947532459\, z^{163}$
$+ 4489906346453968711\, z^{165} + 2904122867945442009\, z^{167}$
$+ 1828009746078399895\, z^{169} + 1119363836440124343\, z^{171} + 666542976815041513\, z^{173}$
$+ 385811161691435983\, z^{175} + 216983527512270656\, z^{177} + 118519222124450910\, z^{179}$
$+ 62842536392391666\, z^{181} + 32329679040906886\, z^{183} + 16128634513507954\, z^{185}$
$+ 7798168301584460\, z^{187} + 3651907337331969\, z^{189} + 1655365283628177\, z^{191}$
$+ 725787325438980\, z^{193} + 307566189503756\, z^{195} + 125872046758204\, z^{197}$
$+ 9811165242305799 1779\, z^{143} + 5\, z^{240} + 1100725113018229\, z^{192} + 558544\, z^{228}$
$+ 988183230\, z^{218} + 3\, z^{6} + 9\, z^{8} + 49705275723434\, z^{199} + 18921243484543\, z^{201}$
$+ 6936330929819\, z^{203} + 2446052253230\, z^{205} + 828781385109\, z^{207} + 269457099897\, z^{209}$
$+ 83945933616\, z^{211} + 25020410259\, z^{213} + 7122392302\, z^{215} + 1932667815\, z^{217}$
$+ 498814836\, z^{219} + 122145335\, z^{221} + 28292810\, z^{223} + 6176898\, z^{225} + 1265340\, z^{227}$
$+ 241794\, z^{229} + 42767\, z^{231} + 6928\, z^{233} + 1010\, z^{235} + 129\, z^{237} + 14\, z^{239} + z^{241} + 379\, z^{236}$
$+ 866816904792572461\, z^{172} + 1435427776897821721\, z^{170} + 197628373837568\, z^{196}$
$+ 474508171807352\, z^{194} + 160955818340625726\, z^{178} + 151217911303\, z^{210}$
$+ 2311974888165277755\, z^{168} + 11848617259264024016 3\, z^{140} + 5358053319200586\, z^{188}$
$+ 22923644330229815\, z^{184} + 12204442605871691914 7\, z^{122} + 475053764177\, z^{208}$
$+ 59211930\, z^{222} + 15116989854301475259 2\, z^{132} + 30765829518353120478\, z^{154}$
$+ 47\, z^{238} + 1496173030067310642\, z^{90} + 160698562225651501\, z^{81}$
$+ 6227493348757310106 1\, z^{113} + 11580260790123188039 8\, z^{121}$
$+ 1866727874076121359\, z^{91} + 240160649345460\, z^{61} + 507410177380843\, z^{63}$
$+ 1048691648714610\, z^{65} + 2120595572878595\, z^{67} + 4196242641203322\, z^{69} + 15\, z^{9}$
$+ 14951662121610445127\, z^{102} + 10749768497535425366\, z^{100}$
$+ 27107798972194012776\, z^{106} + 945879367653498900\, z^{88}$
$+ 12712051498193762550\, z^{101} + 17491115844574175706\, z^{103}$
$+ 31031722505921977372\, z^{107} + 210336181932527698\, z^{82} + 273846930224260828\, z^{83}$
$+ 88772535051022979707\, z^{117} + 75178057414191070313\, z^{115}$
$+ 81919278330751560993\, z^{116} + 56213412996974985764\, z^{112}$
$+ 28597155412362124 66\, z^{93} + 746091337841597107\, z^{87} + 9041549185056014184\, z^{99}$
$+ 3\, z^{7} + z^{5});$

$Jumlah := z + 47\, z^{238} + 558544\, z^{228} + 9904361376101393902\, z^{161} + 6176898\, z^{225}$ **(1)**
$+ 6757624090947532459\, z^{163} + 1655365283628177\, z^{191} + 32329679040906886\, z^{183}$
$+ 11511040982201\, z^{202} + 2446052253230\, z^{205} + 3651907337331969\, z^{189}$
$+ 69421179351064905\, z^{78} + z^{241} + 1100725113018229\, z^{192} + 122145335\, z^{221}$
$+ 125872046758204\, z^{197} + 1119363836440124343\, z^{171} + 666542976815041513\, z^{173}$
$+ 14\, z^{239} + 4489906346453968711\, z^{165} + 2904122867945442009\, z^{167}$
$+ 11873078318726987418\, z^{160} + 6928\, z^{233} + 25020410259\, z^{213}$
$+ 5358053319200586\, z^{188} + 2710\, z^{234} + 22923644330229815\, z^{184} + 59211930\, z^{222}$
$+ 241794\, z^{229} + z^{2} + 7122392302\, z^{215} + 1435427776897821721\, z^{170} + 1010\, z^{235}$
$+ 866816904792572461\, z^{172} + 1828009746078399895\, z^{169} + 197628373837568\, z^{196}$

$$
\begin{aligned}
&+ 1119290616224573955577\, z^{141} + z^3 + 269457099897\, z^{209} + 2\, z^4 \\
&+ 16128634513507954\, z^{185} + 8208092417968004870\, z^{162} + 45246136103935346\, z^{182} \\
&+ 4198273888217658\, z^{69} + 22938164570\, z^{40} + 3732939174\, z^{216} + 14752840304380\, z^{54} \\
&+ 28587776251086176\, z^{75} + 30765829518353120856\, z^{154} + 19672041265914353261\, z^{157} \\
&+ 1074565132428\, z^{48} + 8181415809\, z^{38} + 307859602\, z^{32} + 118519222124450910\, z^{179} \\
&+ 29026337\, z^{28} + 307566189503756\, z^{195} + 35261896505277187531\, z^{153} + 2322588\, z^{24} \\
&+ 102065306843\, z^{43} + 6310266744985\, z^{52} + 308171\, z^{21} + 2859722215068575112\, z^{93} \\
&+ 498814836\, z^{219} + 35330882770906783089\, z^{108} + 22361040619172\, z^{55} \\
&+ 1356487899197116847115\, z^{137} + 427281506724\, z^{46} + 266863562112\, z^{45} + 4440870\, z^{25} \\
&+ 1932667815\, z^{217} + 37992923826\, z^{41} + 10926696592111070963\, z^{120} + 8394760\, z^{26} \\
&+ 153081\, z^{20} + 53141387\, z^{29} + 62486942994\, z^{42} + 3\, z^5 + 1505061085242263436\, z^{129} \\
&+ 173010810\, z^{31} + 2635816796823\, z^{50} + 4831657702\, z^{37} + 96343180\, z^{30} \\
&+ 2831495265\, z^{36} + 1688144234476\, z^{49} + 5857688060697848\, z^{70} \\
&+ 354652115638284995\, z^{84} + 9566729129184910727\, z^{118} \\
&+ 14965828853318998474\, z^{133} + 9811165242305917687\, z^{143} + 475053764177\, z^{208} \\
&+ 14730654055925813579\, z^{134} + 5716137729683316638\, z^{149} + 9676891205496\, z^{53} \\
&+ 15692394\, z^{27} + 17157\, z^{17} + 8046\, z^{16} + 42767\, z^{231} + z^{242} + 158\, z^{11} \\
&+ 18921243484543\, z^{201} + 5113285473259572340\, z^{150} + 6861175776816953161\, z^{114} \\
&+ 86625714284168324\, z^{180} + 3706\, z^{15} + 9\, z^7 + 767\, z^{13} + 75\, z^{10} \\
&+ 1673243740899613588\, z^{158} + 35\, z^9 + 18\, z^8 + 5\, z^6 + 273854262541463007\, z^{83} \\
&+ 6293942757283276856\, z^{97} + 17480\, z^{232} + 612256\, z^{22} + 36145\, z^{18} \\
&+ 210343242981389724\, z^{82} + 1699\, z^{14} + 349\, z^{12} + 11580260793788688771\, z^{121} \\
&+ 6936330929819\, z^{203} + 14583193283590727244\, z^{127} + 15116989854348698688\, z^{132} \\
&+ 79456677875277\, z^{198} + 5046416776441258505\, z^{111} + 6227493384901793134\, z^{113} \\
&+ 21043694980109924\, z^{74} + 5209117107985198824\, z^{96} + 83945933616\, z^{211} \\
&+ 14415201953090803025\, z^{135} + 4545777629486906742\, z^{151} \\
&+ 14024529396529421478\, z^{136} + 2710780052281641585\, z^{106} + 1049740401956789\, z^{65} \\
&+ 5\, z^{240} + 5621341345568726528\, z^{112} + 746099169805849121\, z^{87} \\
&+ 6350801547955682038\, z^{148} + 164234695524845\, z^{60} + 828781385109\, z^{207} \\
&+ 10510674384353683640\, z^{142} + 216983527512270656\, z^{177} \\
&+ 7517805763171873109\, z^{115} + 240636737867340\, z^{61} + 1496567645527244\, z^{66} \\
&+ 2316665332772511816\, z^{92} + 14857343918031359898\, z^{128} + 50494587877704\, z^{57} \\
&+ 75235312909268\, z^{58} + 22980245978979221579\, z^{156} + 2992845557906268\, z^{68} \\
&+ 474508171807352\, z^{194} + 13043513092940796715\, z^{138} + 350639418606965\, z^{62} \\
&+ 679747258768\, z^{47} + 542959717\, z^{33} + 949400536\, z^{34} + 4090571053605\, z^{51} \\
&+ 1646250817\, z^{35} + 1866735164122792009\, z^{91} + 165587428450\, z^{44}
\end{aligned}
$$

$$+ 7012772337817528963 0 z^{147} + 8191927849685989825 9 z^{116} + 111469583857649 z^{59}$$
$$+ 15181819124783021280 3 z^{131} + 508128209635551 z^{63} + 160705305039896482 z^{81}$$
$$+ 3103172380340794709 6 z^{107} + 8129341443019470 z^{71} + 2311974888165277755 z^{168}$$
$$+ 12468522546582221399 2 z^{139} + 379 z^{236} + 8395861070908771970 7 z^{145}$$
$$+ 9232345452490052 5 z^{79} + 160955818340625726 z^{178} + 8877253517651921815 9 z^{117}$$
$$+ 1540813476972137 9 z^{73} + 1199869 z^{23} + 74892 z^{19} + 1025263238456572009 15 z^{119}$$
$$+ 1125930296126816 7 z^{186} + 13329182885760540920 0 z^{124} + 585385617854510598 z^{86}$$
$$+ 246884899021594 6 z^{190} + 2035150870238456414 4 z^{104} + 351125445942326288 6 z^{94}$$
$$+ 756397308950102670 2 z^{98} + 1271205477111708894 9 z^{101}$$
$$+ 12790329466570901626 1 z^{123} + 1414063721538964834 4 z^{159}$$
$$+ 428821440133053409 7 z^{95} + 910337419396825161 8 z^{144} + 732336136806775 z^{64}$$
$$+ 14232972173331160108 8 z^{126} + 2122078875848366 z^{67} + 1749111834233121988 9 z^{103}$$
$$+ 11848617259264751968 6 z^{140} + 38630219787324007 z^{76} + 13749595661 z^{39}$$
$$+ 94588716116318952 8 z^{88} + 7696585896045699387 3 z^{146}$$
$$+ 2667409105820319464 8 z^{155} + 4016191430528434992 1 z^{152}$$
$$+ 1495166499428461856 5 z^{102} + 62842536392391666 z^{181} + 11221790635966974 z^{72}$$
$$+ 33698304753397 z^{56} + 456853575783287276 z^{85} + 12204442608492024990 4 z^{122}$$
$$+ 5192350287872424 0 z^{77} + 904155331640890547 2 z^{99} + 13812649530121246923 8 z^{125}$$
$$+ 1074977219180111504 3 z^{100} + 119280373188149929 2 z^{89} + 149618054944312503 4 z^{90}$$
$$+ 4000702118724831264 5 z^{109} + 2819723 z^{226} + 4505542841434083482 0 z^{110}$$
$$+ 12213065998095649 2 z^{80} + 508922362353834839 z^{174} + 1515947550832075151 75 z^{130}$$
$$+ 2355175781770207236 9 z^{105} + 725787325438980 z^{193} + 102901 z^{230} + 1265340 z^{227}$$
$$+ 248514157 z^{220} + 552668680855464063 2 z^{164} + 362320943469443928 2 z^{166}$$
$$+ 4139374466506 z^{204} + 30810136649902 z^{200} + 385811161691435983 z^{175}$$
$$+ 28292810 z^{223} + 46088723069 z^{212} + 13427869537 z^{214} + 129 z^{237} + 988183230 z^{218}$$
$$+ 151217911303 z^{210} + 290385246997052170 z^{176} + 7798168301584460 z^{187}$$
$$+ 49705275723434 z^{199} + 13323021 z^{224} + 1431058075044 z^{206}$$

>